Логическо програмиране (лекции)
04.10.2018

Ако A е вярно и $A \Rightarrow B$, то B е вярно - modus ponens

Ако $A \Rightarrow B$ и $\neg B$, то $\neg A$ - modus tollens

$\boxed{\text{Ако } A \Rightarrow B \text{ и } B \text{ е приятно, то } A \text{ е вярно}}$ - "modus femitollens" fallacy

Пр. 1 (Парадокс на Бери)

"Най-малкото естествено число, което не се определя с фраза на български език, записана с не повече от триста букви."

$K = 70^{300} + 70^{299} + \dots$

брой позволени символи

$K_1 < K$, където K_1 е броят фрази на български език с ≤ 300 символа

$K_2 < K_1$, където K_2 е броят естествени числа, определени с фрази на български език с ≤ 300 символа

Нека A е множеството от естествени числа, които не се определят с фраза на български език с ≤ 300 символа. Тъй като $K_2 < \infty$ и $\mathbb{N}$ е безкрайно, то $A \neq \emptyset$.

Нека n_0 е най-малкият елемент на A.

Но n_0 се определя от фраза с ≤ 300 символа. Противоречие.

Заб. Ние предполагаме, че някои твърдения имат стойности И(истина) или Л(лъжа).

Опр. Елементарните съждения имат предварително зададена стойност

Опр. Отрицание на съждението A променя стойността на A на противоположната. Пишем $\neg A$.

$H_\neg(И) = Л$

$H_\neg(Л) = И$

$\neg$	A	$\neg A$
	И	Л
	Л	И

__Опр.__ __Конюнкция__ на съжденията A и B наричаме съждението „A и B" ($A \& B$).
$A \wedge B$ / AB

$H_\&(И,И)=И$

$H_\&(И,Л)=H_\&(Л,И)=H_\&(Л,Л)=Л$

__Пр.2__ „A, но B" и „A, а B" са конюнкции

__Пр.1__ „Джон се застреля и умря" не е конюнкция

__Опр.__ __Дизюнкция__ на съжденията A и B наричаме съждението „A или B" ($A \vee B$)

$H_\vee(И,И)=H_\vee(И,Л)=H_\vee(Л,И)=И$

$H_\vee(Л,Л)=Л$

__Опр.__ __Импликация__ на A и B наричаме съждението („ако A, то B")

$A \Rightarrow B$
$A \to B$
$A \supset B$
$B \leftarrow A$

$H_\Rightarrow(И,И)=H_\Rightarrow(Л,И)=H_\Rightarrow(Л,Л)=И$

$H_\Rightarrow(И,Л)=Л$

__Зав.__ С $A \models B$ ще означаваме „във всички светове, в които A е вярно, B е вярно".

__Опр.__ __Еквивалентност__ на A и B наричаме съждението „A тогава и само тогава, когато B" ($A \Leftrightarrow B$)

$H_\Leftrightarrow(И,И)=H_\Leftrightarrow(Л,Л)=И$

$H_\Leftrightarrow(И,Л)=H_\Leftrightarrow(Л,И)=Л$

__Пр.4__ „Ако $2+2=5$, то Вие сте Папата"

__Д-во__
$2+2=5$
$2+2=2+3$
$2=3$
$3=2$

$2+1=1+1$
$2=1$
$\Rightarrow$ всяко нещо е друго нещо $\square$

Опр. Квантор за всеобщност в даден свят за φ е съждението „За всяко x е в сила φ" $(\forall x\, \varphi)$

Пр. 5 $\underbrace{a_1, \ldots, a_5}_{\text{светът, в който работим}}$

$\forall a \varphi$ е еквивалентно на $\varphi(a_1) \& \varphi(a_2) \& \varphi(a_3) \& (a_4) \& (a_5)$,

тъй като светът е краен

Опр. Квантор за съществуване в даден свят за φ наричаме съждението „съществува x, за което φ" $(\exists x\, \varphi)$

Пр. 5 (продължение)

$\exists a \varphi$ е еквивалентно на $\varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \varphi(a_3) \vee \varphi(a_4) \vee \varphi(a_5)$

формални думи (изрази) | семантика

Език на съждителното смятане

* Съвкупност (непразна) от символи Prop
  Замисълът е те да означават елементарни съждения (P, Q, …)
  $2+3=4$
* Букви (символи) за съждителните връзки – $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ $2+3=5$
  $2+3=7$
* Помощни символи – (,)

Някои думи от езика в тази „голяма" азбука ще наричаме съждителни формули. Замисълът е те да означават съждения.

Индуктивна деф. за съждителни формули

* Съждителните променливи са съждителни формули
* ако φ е съждителна формула
* ако φ и ψ са съждителни формули и $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, то думата $(\varphi \sigma \psi)$ е също съждителна формула

Пр. 6 P ; Q ; $(P \& Q)$; $\neg(P \& Q)$ – формули

(P) ; $(P(\vee)Q)$; $P \vee Q)$ – думи, които не са формули

Индуктивен принцип за доказване на свойства на формули

Нека S е свойство. Да докажем, че

* всяка съждителна променлива има свойство S
* ако φ има св. S, то $\neg\varphi$ също има свойство S
* ако φ и ψ имат св. S, то $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ и $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ също имат свойство S

Тогава всяка съждителна формула има свойство S

<u>Пр. 7</u> Ако α е дума, с ЛСК$[\alpha]$ ще озн. броя на буквите (в α

ЛСК$[P] = 0$

ЛСК$[(P \vee Q)(P_1)] = 1$

Анал. дефинираме ДСК$[\alpha]$

* За всяка съждителна формула φ имаме ЛСК$[\varphi]$ = ДСК$[\varphi]$

<u>Д-во</u> С индукция отн. построение.

* Ако P е съждителна променлива, то ЛСК$[P]$ = ДСК$[P] = 0$
* ~~...~~ Нека α и β имат св. ЛСК$[\alpha]$ = ДСК$[\cdot]$ и $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

ЛСК$[(\alpha \sigma \beta)] = 1 +$ ЛСК$[\alpha] + 0 +$ ЛСК$[\beta] + 0 =$

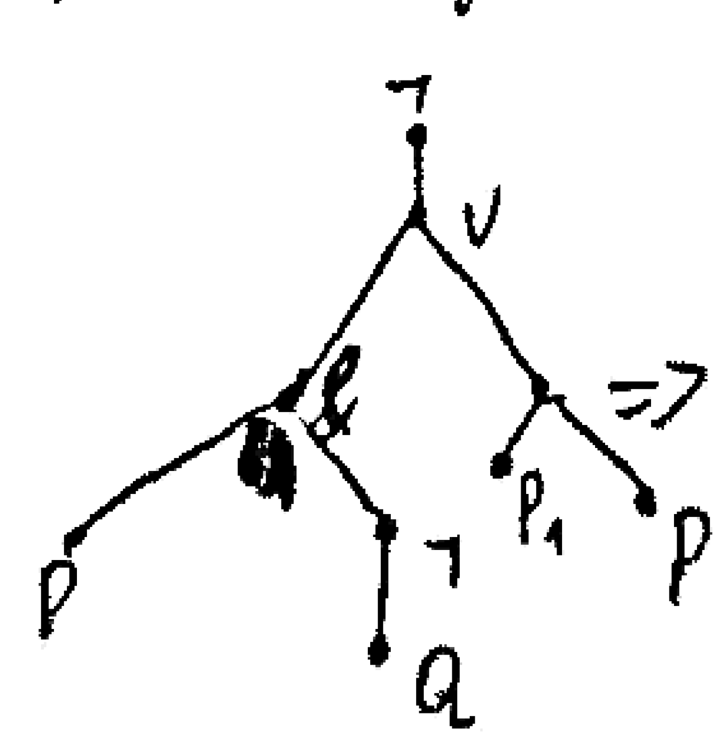
$= 1 +$ ДСК$[\alpha] + 0 +$ ДСК$[\beta] + 0 =$ ДСК$[(\alpha \sigma \beta)]$

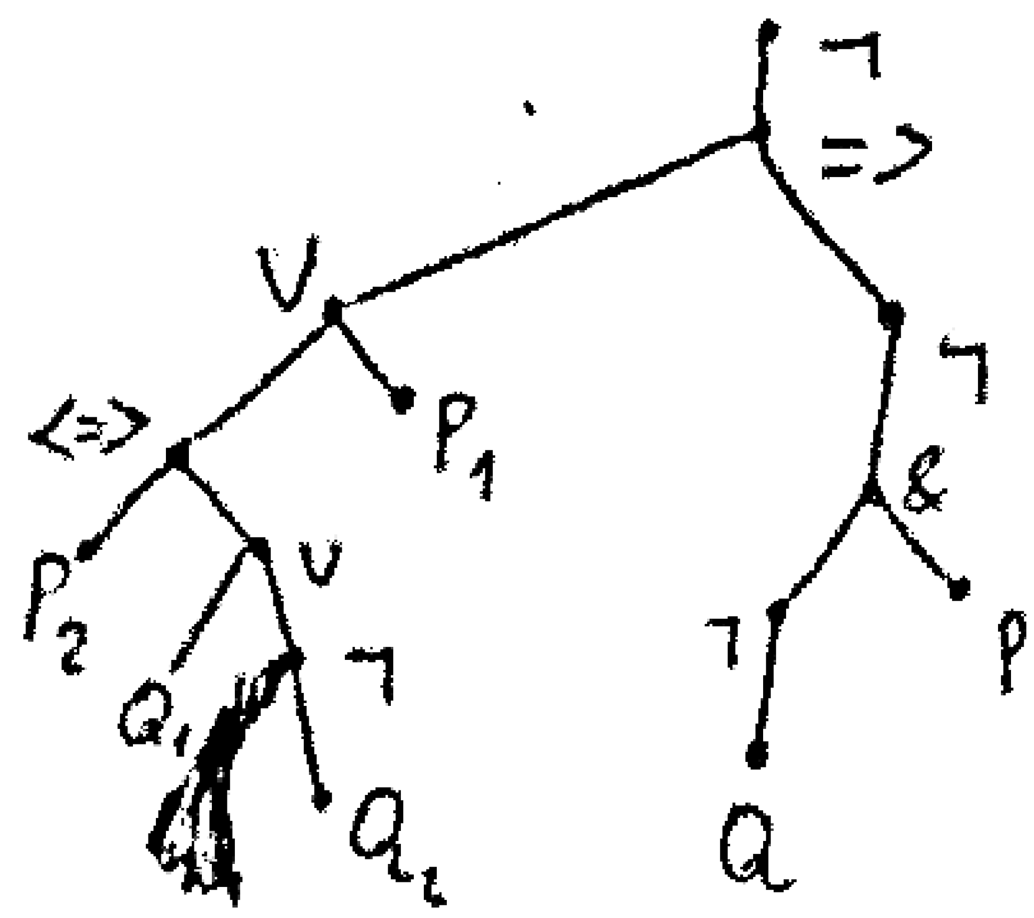
* Нека α е такова, че ЛСК$[\alpha]$ = ДСК$[\alpha]$

ЛСК$[\neg\alpha] = 0 +$ ЛСК$[\alpha]$ = ДСК$[\alpha]$ = ДСК$[\neg\alpha]$

□

<u>Пр. 8</u> $\neg((P \& \neg Q) \vee (P_1 \Rightarrow P))$ Представяне на формули като дървета





$\neg((((P_2 \Leftrightarrow (Q_1 \vee \neg Q_2)) \vee P_1) \Rightarrow \neg(\neg Q_2 \,\&\, P))$

Тв. 1 (Еднозначен синтактичен анализ)
За всяка съждителна формула φ е в сила точно една от следните три възможности:

- $\varphi = P$, където P е променлива еднозначно определена
- $\varphi = \neg\varphi_1$, където φ_1 е еднозначно определена съждителна формула
- $\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2)$, където φ_1, φ_2 са еднозначно определени съжд. формули, а $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ еднозначно определено

Заб. Без поправките „еднозначно определени" горе синтактичния анализ спира да бъде еднозначен. Без еднозначност ~~[illegible]~~ е трудно да говорим за семантика.

11.10.2018

Семантика на съждителните ~~формули~~ формули / оценка на съждителните променливи

Опр. Булева (съждителна) интерпретация наричаме изображение $I: Prop \to \{И, Л\}$.

Тв.1 Всяка булева интерпретация I може да се разшири до изображение $\bar{I}$ от множеството на всички съждителни формули към $\{И, Л\}$, така че

(а) $\bar{I}(P) = I(P)$ за всяка съждителна променлива

(б) $\bar{I}(\neg\varphi) = H_{\neg}(\bar{I}(\varphi))$

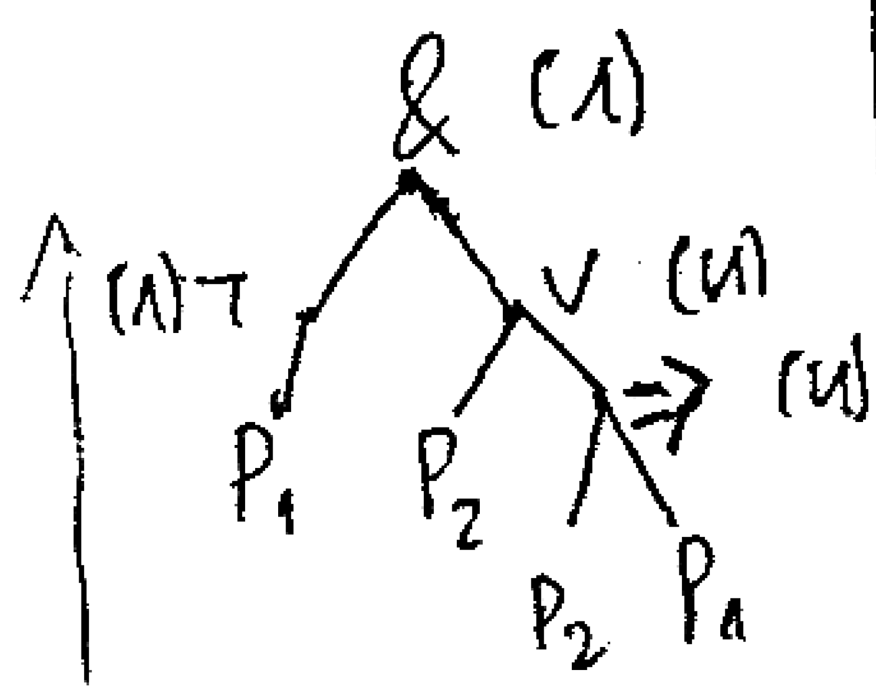
(в) $\bar{I}((\varphi \sigma \psi)) = H_{\sigma}(\bar{I}(\varphi), \bar{I}(\psi)), \sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Д-во Приложение на еднозначния синтактичен анализ - индукция относно построението на съждителни формули.

Ако $\bar{I}$ и $\bar{I}'$ удовлетворяват написаните условия, то те съвпадат.

Непосредствено от инд. принцип и еднозначния синтактичен анализ. □

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = (\varphi_1 \sigma_1 \varphi_2) \\ \varphi = (\varphi_1' \sigma_1' \varphi_2') \end{array}\right\} \text{следва } \sigma_1 = \sigma_1', \varphi_1 = \varphi_1', \varphi_2 = \varphi_2'$$



Заради единствеността, обичайната практика е да се използва I за означение на $\bar{I}$.

Нека
$I(P_1) = И$
$I(P_2) = Л$

Опр. Казваме, че I е (булев) <u>модел за формулата</u> φ, ако $\bar{I}(\varphi) = И$. Пишем $I \models^{б} \varphi$.

Тогава
$\bar{I}(P_2 \Rightarrow P_1) = И$
$\bar{I}(\neg P_1) = Л$

Ако Σ е множество от съждителни формули, а I е булева интерпретация, казваме, че I е <u>булев модел за</u> Σ, ако за всяка формула $\varphi \in \Sigma$, $I \models^{б} \varphi$.

В този случай ще пишем $I \models^{б} \varphi$.

Ако I не е булев модел за φ, пишем $I \not\models^{\delta} \varphi$ (съотв. $I \not\models^{\delta} \Sigma$, ако има формула $\varphi \in \Sigma$, такава че $I \not\models^{\delta} \varphi$, т.е. $\bar{I}(\varphi)=Л$). $I \not\models^{\delta} \Sigma$

Опр. Ако Σ има булев модел, казваме, че Σ е изпълнимо множество. В частност, ако φ има булев модел, то φ е изпълнима формула.

Тв.2 Ако $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ и Σ_2 е изпълнимо, то Σ_1 е също изпълнимо.
Наистина, ако I е булев модел за Σ_2, то за всяка ф-ла $\varphi \in \Sigma_2$, $I \models^{\delta} \varphi$. В частност, за всяко $\varphi \in \Sigma_1$, $I \models^{\delta} \varphi$. Ако $I \models^{\delta} \Sigma_2$, то $I \models^{\delta} \Sigma_1$.

Пр.1 $\{P, \neg P\}$ не е изпълнимо, макар и P и $\neg P$ да са изпълними.

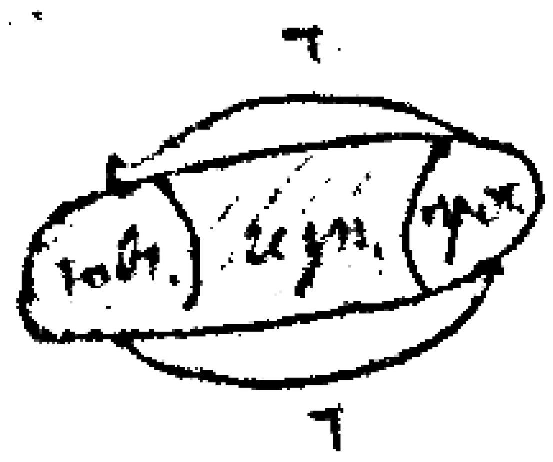
Опр. Ще казваме, че множеството от формули Σ е неизпълнимо, ако Σ не е изпълнимо. Тв.3 Така, ако $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ и Σ_1 е неизп., то и Σ_2 е неизпълнимо.

Зад. φ и $\{\varphi\}$ имат едни и същи модели

Опр. φ е неизпълнима, т.е. няма булева интерпретация I, за която $\bar{I}(\varphi)=И$, т.е. за всяка булева интерпретация I, $\bar{I}(\varphi)=Л$.
Още казваме, че φ е противоречие

Тв.4 φ е съждителна тавтология (всяка бул. инт. е модел.) iff $\neg\varphi$ е противоречие.

Д-во (Дост.)
Нека φ е съжд. тавт.
Нека I е произволна булева интерпретация. Тогава $I \models^{\delta} \varphi$, т.е. $\bar{I}(\varphi)=И$. Следователно $\bar{I}(\neg\varphi) = H_\neg(\bar{I}(\varphi)) = H_\neg(И) = Л$, т.е. $I \not\models^{\delta} \neg\varphi$.
(Необходимост) Нека $\neg\varphi$ е противоречие. Нека I е произв. булева инт. Тъй като $\neg\varphi$ е противоречие, $\bar{I}(\neg\varphi)=Л$. $Л=\bar{I}(\neg\varphi)=H_\neg(\bar{I}(\varphi))$.
След. $\bar{I}(\varphi)=Л$. I е произв.. Следователно φ е тавтология □



φ е съжд. тавт. iff $\neg\varphi$ е съжд. против.
φ е съжд. прот. iff $\neg\varphi$ е съжд. тавт.

<u>Пр.2</u> $P \vee Q$ не е нито тавтология, нито противоречие.
$\varphi \vee \neg\varphi$ е тавтология
$\varphi \,\&\, \neg\varphi$ е противоречие

<u>Опр.</u> Нека φ е съждителна формула. С <u>$Var(\varphi)$</u> означаваме множеството на съждителните променливи, участващи във φ

<u>Тв.5</u> Нека φ е съжд. формула. Тогава всеки път, когато I_1 и I_2 са булеви интерпретации, такива че за всяко $P \in Var(\varphi)$, $I_1(P) = I_2(P)$ е в сила $\bar{I}_1(\varphi) = \bar{I}_2(\varphi)$

<u>Д-во</u> С инд. отн. φ

* Нека φ е съжд. пром. P. Тогава $Var(\varphi) = \{P\}$. Нека I_1 и I_2 са булеви интерпретации, удовл. условието за всяка пром. от $Var(\varphi)$, I_1 и I_2 съвпадат.
$$\bar{I}_1(\varphi) = \bar{I}_1(P) = I_1(P) = I_2(P) = \bar{I}_2(P) = \bar{I}_2(\varphi)$$
* Нека $\varphi = \neg\psi$, като за ψ твърдението е вярно. Значи всеки път, когато I_1 и I_2 са булеви инт., такива че за всяко $P \in Var(\psi)$, $I_1(P) = I_2(P)$, $\bar{I}_1(\psi) = \bar{I}_2(\psi)$

Нека I_1 и I_2 са б. инт. и за всяко $P \in Var(\varphi)$ имаме $I_1(P) = I_2(P)$. $Var(\varphi) = Var(\neg\psi) = Var(\psi)$. Следователно за всяка $P \in Var(\psi)$, $I_1(P) = I_2(P)$. От инд. пред. $\bar{I}_1(\psi) = \bar{I}_2(\psi)$.

Следователно $H_\neg(\bar{I}_1(\psi)) = H_\neg(\bar{I}_2(\psi))$, т.е. $\bar{I}_1(\neg\psi) = \bar{I}_2(\neg\psi)$.
* Нека $\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2)$, където $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, а за φ_1 и φ_2 тв. е вярно. Нека I_1 и I_2 са булеви инт., такива че $I_1(P) = I_2(P)$ всеки път, когато $P \in Var(\varphi)$

$Var(\varphi) = Var(\varphi_1) \cup Var(\varphi_2)$

След. за всяко $P \in Var(\varphi_1)$ имаме $I_1(P) = I_2(P)$. Прилагаме инд. за φ_1, I_1, I_2 и получаваме $\bar{I}_1(\varphi_1) = \bar{I}_2(\varphi_1)$.

За всяко $P \in Var(\varphi_2)$, $P \in Var(\varphi)$, имаме $I_1(P) = I_2(P)$. Прил. инд. за φ_2, I_1, I_2: $\bar{I}_1(\varphi_2) = \bar{I}_2(\varphi_2)$

$$H_\sigma(\bar{I}_1(\varphi_1), \bar{I}_1(\varphi_2)) = H_\sigma(\bar{I}_2(\varphi_1), \bar{I}_2(\varphi_2))$$

$$\bar{I}_1(\varphi) = \bar{I}_1((\varphi_1 \sigma \varphi_2)) \qquad \bar{I}_2((\varphi_1 \sigma \varphi_2)) = \bar{I}_2(\varphi)$$

□

Сл.1 Проблемите за изпълнимост и тавтологичност на съжд. формули са разрешими, т.е. има алгоритми, които по дадена произволна ф-ла φ разпознават дали φ е изпълнима и съотв. дали φ е тавтология.

D-во $Var(\varphi)$ е крайно множество, $Var(\varphi) = \{P_1, \dots, P_n\}$.
Последователно пораждаме редица с дължина n от И, Л. За всяка такава редица $a_1, \dots, a_n$ смятаме стойността на φ при $I(P_j) = a_j$, $1 \leq j \leq n$. Спираме тогава, когато получим И.
Така имаме алгоритъм за разпознаване на изпълнимост □

Заб. Проблемът за изпълнимост на съждителна формула е NP-пълен.

Булева еквивалентност на съжд. формули

Опр. Нека φ и ψ са съждителни формули. Казваме, че те са логически еквивалентни, ако за всяка б. инт. I, $\bar{I}(\varphi) = \bar{I}(\psi)$.
Пишем $\varphi \overset{б}{\models\!\dashv} \psi$.

Заб. φ и ψ имат едни и същи булеви модели ако са логически еквивалентни

Свойства:

* $\varphi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \varphi$
* $\varphi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \psi$ влече $\psi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \varphi$
* $\varphi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \psi$ и $\psi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \chi$ влече $\varphi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \chi$
* $\varphi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \chi$ влече $\neg\varphi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \neg\psi$
* $\varphi_1 \overset{\delta}{\models\!\dashv} \psi_1$ и $\varphi_2 \overset{\delta}{\models\!\dashv} \psi_2$ и $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, то $(\varphi_1 \sigma \varphi_2) \overset{\delta}{\models\!\dashv} (\psi_1 \sigma \psi_2)$

<u>Д-во</u> Нека I е булева интерпретация. Тогава, тъй като $\varphi_1 \overset{\delta}{\models\!\dashv} \psi_1$, имаме $\bar{I}(\varphi_1) = \bar{I}(\psi_1)$.

$\varphi_2 \overset{\delta}{\models\!\dashv} \psi_2 \qquad \bar{I}(\varphi_2) = \bar{I}(\psi_2)$

$$\bar{I}((\varphi_1 \sigma \varphi_2)) = H_\sigma(\bar{I}(\varphi_1), \bar{I}(\varphi_2)) = H_\sigma(\bar{I}(\psi_1), \bar{I}(\psi_2)) = \bar{I}((\psi_1 \sigma \psi_2))$$

Следователно $(\varphi_1 \sigma \varphi_2) \overset{\delta}{\models\!\dashv} (\psi_1 \sigma \psi_2)$ $\square$

<u>Заб.</u> Формулите образуват алгебрична система и $\models\!\dashv$ разбива това множество на класове, за които алгебричните операции са съгласувани.

Някои логически (булеви) еквивалентности

* $\varphi \& \psi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \psi \& \varphi$: $H_\&(a,b) = H_\&(b,a)$
* $\varphi \vee \psi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \psi \vee \varphi$: $H_\vee(a,b) = H_\vee(b,a)$
* $\varphi \& (\psi \vee \chi) \overset{\delta}{\models\!\dashv} (\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \chi)$
* $\varphi \vee (\psi \& \chi) \overset{\delta}{\models\!\dashv} (\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \chi)$
* $\neg(\varphi \& \psi) \overset{\delta}{\models\!\dashv} \neg\varphi \vee \neg\psi$
* $\neg(\varphi \vee \psi) \overset{\delta}{\models\!\dashv} \neg\varphi \& \neg\psi$
* $\varphi \Rightarrow \psi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \neg\varphi \vee \psi$:

<u>Д-во</u> Нека I е произв. булева инт.

* Нека $\left.\begin{array}{l} \bar{I}(\varphi \Rightarrow \psi) = 1 \\ H_{\Rightarrow}(\bar{I}(\varphi), \bar{I}(\psi)) = 1 \end{array}\right\}$ след. $\left\{\begin{array}{l} \bar{I}(\varphi) = 0, \bar{I}(\psi) = 1 \\ \bar{I}(\neg\varphi) = H_\neg(\bar{I}(\varphi)) \end{array}\right.$

Тогава $\bar{I}(\neg\varphi)=\bar{I}(\psi)=\lambda$. Следователно $H_{\vee}(\bar{I}(\neg\varphi),\bar{I}(\psi))=\lambda$

$$\underbrace{H_{\vee}(\bar{I}(\neg\varphi),\bar{I}(\psi))}_{=\ \bar{I}((\neg\varphi\vee\psi))}=\lambda$$

+ Нека $\bar{I}(\neg\varphi\vee\psi)=\lambda$. Тогава $H_{\vee}(\bar{I}(\neg\varphi),\bar{I}(\psi))=\lambda$.

$\bar{I}(\neg\varphi)=\bar{I}(\psi)=\lambda$. ; $\bar{I}(\neg\varphi)=H_{\neg}(\bar{I}(\varphi))=\lambda$. Следователно $\bar{I}(\varphi)=u$.

Следователно $\underbrace{H_{\Rightarrow}(\bar{I}(\varphi),\bar{I}(\psi))}_{=\ \bar{I}((\varphi\Rightarrow\psi))}=\lambda$ □

+ $\neg\neg\varphi \overset{\delta}{\models\!\dashv} \varphi$

+ $\neg(\varphi\Rightarrow\psi) \overset{\delta}{\models\!\dashv} \varphi \,\&\, \neg\psi$

+ $\varphi\Leftrightarrow\psi \overset{\delta}{\models\!\dashv} (\varphi\Rightarrow\psi)\,\&\,(\psi\Rightarrow\varphi)$

+ $\varphi\Leftrightarrow\psi \overset{\delta}{\models\!\dashv} (\varphi\,\&\,\psi)\vee(\neg\varphi\,\&\,\neg\psi)$

+ $\varphi\,\&(\psi\vee\neg\psi) \overset{\delta}{\models\!\dashv} \varphi$

+ $\varphi\vee(\psi\,\&\,\neg\psi) \overset{\delta}{\models\!\dashv} \varphi$

Заместване на съждителни променливи със съждителни формули

Нека φ е съжд. формула и $Var\,\varphi \subseteq \{P_1,\dots,P_n\}$, където $P_1,\dots,P_n$ са различни съждителни променливи. Нека $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ са произв. съждителни формули.

$\varphi[P_1,\dots,P_n]$: $Var(\varphi)\subseteq\{P_1,\dots,P_n\}$

$\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1},\dots,{}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ резултат от едновременната замяна на всички срещания на буквите $P_1,\dots,P_n$ във φ със съответните $\varphi_1,\dots,\varphi_n$.

Пр.3

$\varphi=(P\,\&\,Q)\Rightarrow P$ $\quad\quad \varphi[P,Q]$

$\varphi\left[{}^{P}/_{(Q\vee R)},\ {}^{Q}/_{(P\Rightarrow P)}\right]=$ $\quad\quad \varphi[P,Q,P']$

$\varphi[P,Q,P',P'']$

$=((Q\vee R)\,\&\,(P\Rightarrow P))\Rightarrow(Q\vee R)$

Тв. 6 Ако $\varphi[P_1,\dots,P_n]$ ($P_1,\dots,P_n$ - разл. съжд. пром.) и $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ са произволни съждителни формули, то $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1},{}^{P_2}/_{\varphi_2},\dots,{}^{P_n}/_{\varphi_n}]$. е също съгласувана формула.

Тв.7 Нека $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са съгл. ф-ли, $\psi_1, \dots, \psi_n$ са съгл. ф-ли и

$\alpha_0 \varphi_1 \alpha_1 \varphi_2 \dots \alpha_{n-1} \varphi_n \alpha_n$ е съгл. ф-ла, то

$\alpha_0 \psi_1 \alpha_1 \psi_2 \dots \alpha_{n-1} \psi_n \alpha_n$ е също съгласувана формула

Д-во
Избираме променливи $Q_1, \dots, Q_n$ - разл. и не се срещат в

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$; $\psi_1, \dots, \psi_n$; $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

• Тогава думата $\alpha_0 Q_1 \alpha_1 Q_2 \dots Q_n \alpha_n =: \varphi$. е съгл. формула.

$\varphi[P_1, \dots, P_k; Q_1, \dots, Q_n]$ $\qquad$ $\varphi[{}^{P_1}/_{P_1}, \dots, {}^{P_k}/_{P_k}, {}^{Q_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{Q_n}/_{\varphi_n}] = \alpha_0 \varphi_1 \dots \varphi_n \alpha_n$

$\varphi[{}^{P_1}/_{P_1}, \dots, {}^{P_k}/_{P_k}, {}^{Q_1}/_{\psi_1}, \dots, {}^{Q_n}/_{\psi_n}] = \alpha_0 \psi_1, \dots, \psi_n \alpha_n$.

□

Т-ма (за еквив. замяна) Нека $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n$ са съгл. ф-ли. Нека $\alpha_0 \varphi_1 \alpha_1 \dots \varphi_n \alpha_n$ е също съгл. ф-ла. Нека I е булева инт.

Тогава, ако

$\bar{I}(\varphi_1) = \bar{I}(\psi_1), \dots, \bar{I}(\varphi_n) = \bar{I}(\psi_n)$,

то $\bar{I}(\alpha_0 \varphi_1 \alpha_1 \dots \varphi_n \alpha_n) = \bar{I}(\alpha_0 \psi_1 \alpha_1 \dots \psi_n \alpha_n)$

Д-во С индукция относно построението $\alpha_0 \varphi_1 \alpha_1 \dots \varphi_n \alpha_n$.
За самостоятелна подготовка □

Сл.1 Нека $\alpha_0 \varphi_1 \alpha_1 \dots \varphi_n \alpha_n$ е съгл. ф-ла. Нека φ_1 е бул. екв. с ψ_1, … $\varphi_n \overset{B}{\models\!\dashv} \psi_n$. Тогава $\alpha_0 \varphi_1 \alpha_1 \dots \varphi_n \alpha_n \models\!\dashv \alpha_0 \psi_1 \alpha_1 \dots \psi_n \alpha_n$.

18.10.2018

Ако имаме две интерпретации I_1, I_2; $I_1 \restriction Var[\varphi] = I_2 \restriction Var[\varphi]$, то $\overline{I}_1(\varphi) = \overline{I}_2(\varphi)$

Ако $\varphi_i \stackrel{\delta}{\models\mid} \psi_i, i=1,\dots,n$, то
$$\left.\begin{array}{l}\varphi = \alpha_0 \varphi_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \varphi_n \alpha_n \\ \psi = \alpha_0 \psi_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \psi_n \alpha_n\end{array}\right\} \varphi \stackrel{\delta}{\models\mid} \psi$$

<u>Тв.1</u> Има алгоритъм, който по дадена съждителна формула φ дава винаги като резултат формула ψ:

* $\varphi \stackrel{\delta}{\models\mid} \psi$
* В ψ няма срещания на $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

Ако φ е съждителна променлива, то $\psi := \varphi$.

<u>Д-во</u> Най-напред, ако φ е съждителна формула и алг. за φ_1 дава ψ_1, $\varphi_1 \stackrel{\delta}{\models\mid} \psi_1$ и в ψ_1 няма $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.

* Ако $\varphi = \neg\varphi_1$ и алг. за φ_1 дава ψ_1, $\varphi_1 \models\mid \psi_1$
 Тогава $\varphi_1 \stackrel{\delta}{\models\mid} \psi_1$ влече $\underbrace{\neg\varphi_1}_{\varphi} \stackrel{\delta}{\models\mid} \underbrace{\neg\psi_1}_{\psi}$. В ψ_1 няма $\Rightarrow, \Leftrightarrow$, следователно в $\psi = \neg\psi_1$ също няма $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.
* $\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2)$, $\sigma \in \{\vee, \&\}$ и алг. за φ_1 и φ_2 дава ψ_1 и ψ_2.
 Тогава $(\psi_1 \sigma \psi_2)$ обявяваме, че формулата
 $\varphi_1 \stackrel{\delta}{\models\mid} \psi_1$ и $\varphi_2 \stackrel{\delta}{\models\mid} \psi_2$ влече $(\varphi_1 \sigma \varphi_2) \stackrel{\delta}{\models\mid} (\psi_1 \sigma \psi_2)$
 В $(\psi_1 \sigma \psi_2)$ няма $\Rightarrow, \Leftrightarrow$
* $\varphi = (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$; за φ_1 и φ_2 алг. дава ψ_1 и ψ_2
 $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \stackrel{\delta}{\models\mid} (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$; $(\psi_1 \Rightarrow \psi_2) \stackrel{\delta}{\models\mid} (\neg\psi_1 \vee \psi_2)$.
 Обявяваме формулата $(\neg\psi_1 \vee \psi_2)$ за резултат от работата на алгоритъма.
* $\varphi = (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$; за φ_1 и φ_2 алг. дава ψ_1 и ψ_2
 $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \stackrel{\delta}{\models\mid} (\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2)$ и $(\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2) \stackrel{\delta}{\models\mid} (\psi_1 \& \psi_2) \vee (\neg\psi_1 \& \psi_2)$.
 Резултатът е $(\psi_1 \& \psi_2) \vee (\neg\psi_1 \& \neg\psi_2)$.

$\square$

Тв.2 Има алгоритъм, който по дадена формула φ дава винаги за резултат формула ψ:

* $\varphi \overset{\delta}{\models\!\!\!\dashv} \psi$
* В ψ няма срещане на $\Rightarrow, \Leftrightarrow$
* Всяко срещане на $\neg$ е от вида $\neg P$ ($P \in Prop$)

Д-во От тв.1 получаваме ψ'; $\varphi \overset{\delta}{\models\!\!\!\dashv} \psi'$ и в ψ' няма $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$.

* Ако $\psi' \in Prop$, $\psi := \psi'$
* $\psi' = \neg \psi''$

Ако ψ'' е от вида $\neg\psi'''$, то $\psi' = \neg\neg\psi''' \overset{\delta}{\models\!\!\!\dashv} \psi'''$.

Ако $\psi'' = (\psi_1 \& \psi_2)$, то $\neg\psi'' \overset{\delta}{\models\!\!\!\dashv} \neg(\psi_1 \& \psi_2) \overset{\delta}{\models\!\!\!\dashv} (\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$

$\psi'' = (\psi_1 \vee \psi_2)$, то $\neg\psi'' \overset{\delta}{\models\!\!\!\dashv} \neg(\psi_1 \vee \psi_2) \overset{\delta}{\models\!\!\!\dashv} (\neg\psi_1 \& \neg\psi_2)$

Опр. Елементарна конюнкция наричаме формула от вида $\varepsilon_1 P_1 \& \varepsilon_2 P_2 \& \dots \varepsilon_n P_n$, където $\varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon \\ \neg \end{cases}$, а $P_1, \dots, P_n \in Prop$

Пр.1

$\left.\begin{array}{l} \neg P_1 \\ P_1 \& \neg P_1 \\ P_1 \& \neg P_2 \\ \neg P_1 \& \neg P_{17} \end{array}\right\}$ елементарни

$\neg\neg P_1 \}$ неелементарни

Заб. $P_1, \dots, P_n$ могат да не бъдат различни

Опр. Елементарна дизюнкция наричаме ф-ла от вида $\varepsilon_1 P_1 \vee \varepsilon_2 P_2 \vee \dots \vee \varepsilon_n P_n$, където $\varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon \\ \neg \end{cases}$, а $P_1, \dots, P_n \in Prop$

$\{\varepsilon_1 P_1, \dots, \varepsilon_n P_n\}$

множества от този вид ще наричаме дизюнкти

Тв.3 Има алг., който на φ сопоставя $\psi = \psi_1 \& \psi_2 \dots \& \psi_n$, където $\psi_1, \dots, \psi_n$ са елементарни дизюнкции.

логическо следване

Опр. Нека φ и ψ са съждителни формули. Казваме, че от φ логически следва ψ и пишем $\varphi \models \psi$, когато всеки модел на φ е и модел на ψ. Всеки път, когато I е булева интерпретация, ако $\bar{I}(\varphi) = И$, то $\bar{I}(\psi) = И$.

Свойства

- $\varphi \overset{\delta}{\models} \psi$ iff $\varphi \Rightarrow \psi$ е булева тавтология

Д-во Допускаме, че $\varphi \Rightarrow \psi$ не е булева тавтология. Тогава има б. инт. I, при която $I \not\models^{\delta} \varphi \Rightarrow \psi$. Нека I е такава б.инт. Тогава $\bar{I}(\varphi) = И$ и $\bar{I}(\psi) = Л$.

От $\bar{I}(\varphi) = И$ следва $I \overset{\delta}{\models} \varphi$. Но $\varphi \overset{\delta}{\models} \psi$. Следователно $I \overset{\delta}{\models} \psi$, т.е. $\bar{I}(\psi) = И$ ↯

Обратно, нека $\varphi \Rightarrow \psi$ е булева тавтология. Да допуснем, че $\varphi \not\models^{\delta} \psi$. Нека I е б.инт., $I \overset{\delta}{\models} \varphi$, и $I \not\models^{\delta} \psi$.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{I}(\varphi) = И \\ \bar{I}(\psi) = Л\end{array}\right\} H_{\Rightarrow}(\bar{I}(\varphi), \bar{I}(\psi)) = \bar{I}(\varphi \Rightarrow \psi) = Л,$$ т.е. $\varphi \Rightarrow \psi$ не е булева тавтология. ↯

- Ако φ е противоречие, то за всяка ψ, $\varphi \overset{\delta}{\models} \psi$
- Ако ψ е съжд. тавт., то за всяка φ, $\varphi \overset{\delta}{\models} \psi$
- Ако φ не е противоречие и ψ не е тавтология и $\varphi \overset{\delta}{\models} \psi$, то φ и ψ имат поне една обща съждителна променлива

Д-во

φ не е против. Тогава избираме б. инт. I: $\bar{I}(\varphi) = И$

ψ не е тавт. Тогава избираме б. инт. J: $\bar{J}(\psi) = Л$.

Дефинираме K:

$$K(P) = \begin{cases} I(P), & \text{ако } P \text{ участва във } \varphi \\ J(P), & \text{ако } P \text{ не участва във } \varphi \end{cases}$$

Тогава за всяко $P \in Var(\psi)$ $K(P) = I(P)$. Следователно $\bar{K}(\psi) = \bar{I}(\psi) = И$.

Да допуснем, че φ и ψ нямат общи променливи. Тогава за всяка променлива P, която участва в ψ, P не участва във φ. Следователно, $K(P) = J(P)$. Следователно $\bar{K}(\psi) = \bar{J}(\psi) = Л$

$\bar{K}(\varphi) = И$ и $\bar{K}(\psi) = Л$, но $\varphi \models^{\delta} \psi$, което е абсурдно.

Следователно допуснатото е невярно. □

Можем да разглеждаме едновременно модели за $\varphi_1 \& \dots \& \varphi_n$ и $\underbrace{\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}}_{\text{крайно множество}}$

<u>Опр.</u> Нека Σ е множество от съждителни формули и φ е съждителна формула. Казваме, че от <u>Σ логически следва φ</u>, $\Sigma \models^{\delta} \varphi$, ако всеки модел на Σ е модел на φ

$\Sigma \not\models^{\delta} \varphi$: има модел на Σ, който не е модел на φ.

С други думи, има б. инт. I, такава че $\chi \in \Sigma$ влече $\bar{I}(\chi) = И$ и същевременно $\bar{I}(\varphi) = Л$.

<u>Тр. 2</u> $\Sigma = \{\psi\} \models^{\delta} \varphi$ iff $\psi \models^{\delta} \varphi$

$\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$; пишем $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models^{\delta} \varphi$ вместо $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models^{\delta} \varphi$

$\Sigma = \emptyset$; $\emptyset \models^{\delta} \varphi$ iff φ е съжд. тавтология

<u>Д-во</u> Нека $\emptyset \models^{\delta} \varphi$. Нека I е произволна булева интерпретация. Тогава I е модел на $\emptyset$. От това, че I е модел за $\emptyset$ получаваме, че I е модел за φ, т.е. φ е съжд. тавтология.

Обратно, нека φ е съжд. тавтология. Нека I е произволен модел за $\emptyset$. Тъй като φ е съждителна тавтология, $\bar{I}(\varphi) = И$. Така всеки модел на празното множество е модел на φ. □

Вместо $\emptyset \models^{\delta} \varphi$ пишем $\models^{\delta} \varphi$

φ е съждителна тавтология iff $\models^{\delta} \varphi$.

Свойства на логическото следване:

* $\Sigma \models^{\delta} \varphi$ и $\Sigma \subseteq \Sigma_1$ влекат $\Sigma_1 \models^{\delta} \varphi$ (монотонност)

Д-во Нека $\Sigma \models^{\delta} \varphi$ и $\Sigma \subseteq \Sigma_1$. Нека I е произволен модел на Σ_1, $I \models \Sigma_1$ (т.е. $\chi \in \Sigma_1$ влече $\bar{I}(\chi) = И$, $I \models^{\delta} \chi$). Нека $\chi \in \Sigma$. Тогава $\chi \in \Sigma_1$, значи $I \models^{\delta} \chi$. С други думи, $I \models^{\delta} \Sigma$. Но $\Sigma \models^{\delta} \varphi$, поради което $I \models^{\delta} \varphi$. Тъй като I е произволен модел на Σ_1, $\Sigma_1 \models^{\delta} \varphi$. $\square$

* $\Sigma \cup \{\psi\} \models^{\delta} \varphi$ iff $\Sigma \models^{\delta} \psi \Rightarrow \varphi$ (семантична дедукция)

Пр.3

Т-ма (вариант 1) $\overbrace{\text{Нека } f \text{ е дефинирана в } [a, b].}^{\psi_1}$ Нека $\underbrace{f \text{ е непрекъсната}}_{\psi_2}$. $\underbrace{\text{Тогава } f \text{ достига макс. стойност}}_{\varphi}$.

$\psi_1, \psi_2 \models^{\delta} \varphi$

Т-ма (вариант 2) $\overbrace{\text{Нека } f \text{ е дефинирана в } [a, b].}^{\psi_1}$ Ако $\underbrace{f \text{ е непрекъсната}}_{\psi_2}$, то $\underbrace{f \text{ достига макс. стойност}}_{\varphi}$

$\psi_1 \models^{\delta} \psi_2 \Rightarrow \varphi$

Д-во (на сем. дедукция)

(Достатъчност) $\Sigma, \psi \models^{\delta} \varphi$. Нека I е произволен модел за Σ

1 сл. Нека $I \models^{\delta} \psi$. Тогава $I \models^{\delta} \Sigma \cup \{\psi\}$, но $\Sigma \cup \{\psi\} \models^{\delta} \varphi$. Следователно $I \models^{\delta} \varphi$.

2 сл. $I \not\models^{\delta} \psi$, т.е. $\bar{I}(\psi) = Л$. Тогава $H_{\Rightarrow}(\bar{I}(\psi), \bar{I}(\varphi)) = И$.

$\bar{I}((\psi \Rightarrow \varphi)) = И$, $I \models^{\delta} \psi \Rightarrow \varphi$.

Така и в двата случая $I \models^{\delta} \psi \Rightarrow \varphi$. Значи $\Sigma \models^{\delta} \psi \Rightarrow \varphi$

(Необходимост) Нека $\Sigma \models^{\delta} \psi \Rightarrow \varphi$. Нека I е модел за $\Sigma \cup \{\psi\}$.

Тогава за всяка $\chi \in \Sigma \cup \{\psi\}$ имаме $\bar{I}(\chi) = И$. В частност, $\chi \in \Sigma$ влече $\bar{I}(\chi) = И$, т.е. $\underbrace{I \models^{\delta} \Sigma}_{(1)}$. Ако $\chi = \psi$, то $\underbrace{\bar{I}(\psi) = И}_{(2)}$

От (1) и (2) следва

$\bar{I}(\psi \Rightarrow \varphi) = И$.

От друга страна, $\bar{I}(\psi) = И$

$H_{\Rightarrow}(\bar{I}(\psi), \bar{I}(\varphi)) = И$

следователно $\bar{I}(\varphi) = И$, т.е. $I \models^{\delta} \varphi$.

След. $\Sigma \cup \{\psi\} \models^{\delta} \varphi$ □

* $\psi_1, \dots, \psi_n \models^{\delta} \varphi$ iff $\models^{\delta} (\psi_1 \& \dots \& \psi_n) \Rightarrow \varphi$
* $\Sigma \models^{\delta} \varphi$ iff $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо множество

Д-во

(Достатъчност) Нека $\Sigma \models^{\delta} \varphi$. Да допуснем, че $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ е изпълнимо. Тогава това множество ~~има~~ има модел. Нека $I \models^{\delta} \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$.

Следователно $\overbrace{I \models^{\delta} \Sigma}^{(1)}$ и $I \models^{\delta} \neg\varphi$

$\left.\begin{array}{l} \bar{I}(\neg\varphi) = И \text{; но } \bar{I}(\neg\varphi) = H_{\neg}(\bar{I}(\varphi)), \text{ след. } \bar{I}(\varphi) = Л \\ \text{От (1). } \Sigma \models^{\delta} \varphi, \text{ след. } I \models^{\delta} \varphi, \text{ т.е. } \bar{I}(\varphi) = И \end{array}\right\}$ Противоречие

(Необходимост) Нека $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо. Нека I е произволен модел на Σ. Тъй като $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ няма модел.

След. $I \not\models^{\delta} \neg\varphi$, т.е. $I \models^{\delta} \varphi$.

I е произволен модел на Σ, поради което $\Sigma \models^{\delta} \varphi$.

* $\Sigma \models^{\delta} \varphi$ iff ~~Зо~~ същ. крайно $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\Sigma_0 \models^{\delta} \varphi$. (компактност)
ще бъде доказано по-късно.

Предикатно смятане от първи ред

$$\underbrace{\boxed{\forall x \varphi} \vee \neg \boxed{\forall x \varphi}}_{\text{тавтология, без значение какво е } \varphi}$$

$$\forall x (\underbrace{\varphi \vee \neg \varphi}_{\text{тавтология}})$$

Език на предикатното смятане е двойка от вида
(логическа част, нелогическа част)

Логическата част ще е една и съща за всички езици на предикатното смятане от I ред. Бележи се с $\mathcal{L}$ и съдържа

* Азбука на индивидните променливи - изброимо много букви $x_0, x_1, \ldots$
* Булеви операции - „$\neg$", „$\&$", „$\vee$", „$\Rightarrow$", „$\Leftrightarrow$"
* Квантори - „$\forall$", „$\exists$" (квантор за всеобщност, квантор за съществуване).
* Помощни символи „(", „)"
* Други - „$\doteq$" (формално равенство)

Нелогическа част:

* Индивидни константи - $Const_{\mathcal{L}}$ $(=\emptyset, \neq \emptyset)$ → може да бъде празно и непразно
* Функционални символи - $Func_{\mathcal{L}}$ $(=\emptyset, \neq\emptyset)$

$f \in Func_{\mathcal{L}}$; $\#f > 0$ — арност на символа f (брой аргументи)

* Предикатни символи $Pred_{\mathcal{L}}$ $(=\emptyset, \neq\emptyset)$

$p \in Pred_{\mathcal{L}}$ $\quad \#p > 0$ — арност на символа p

Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език от първи ред. Ще дефинираме две множества от формални думи в обединението на азбуките от $\mathcal{L}$.

Термове: $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ - означават обекти

Формули: $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ - означават свойства

Опр. (Терм)

* Индивидните променливи са термове
* Индивидните константи са термове
* Ако $\#f=n$, $f \in Func$ и $\tau_1, \ldots, \tau_n$ са термове, то

  $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ е също терм

Опр. (Формула)

* Атомарни формули - думите от вида $p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, където p е n-местен предикатен символ. Ако езикът е с формално равенство, то думите от вида $(\tau_1 = \tau_2)$ са също формули.
* Ако φ е формула, то $\neg\varphi$ е също формула
* Ако φ и ψ са формули, то $(\varphi \sigma \psi)$, $\sigma \in (\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$ е също формула
* Ако φ е формула, а x е индивидна променлива, то $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ са също формули.

25.10.2018 Език на теория на множествата ($\mathcal{L}_{ST}$)

* език с формално равенство
* $\in$ - двуместен предикатен символ

Език на теория на групите (S_g)

* език с формално равенство
* една ~~[illegible]~~ индивидна константа - e
* $\cdot$ - двуместен функционален символ

Език на теория на полетата (S_f)

* език с формално равенство
* $0, 1$ - индивидни константи
* $+, \cdot$ - двуместни функционални символи

Език на наредените полета (S_{of})

* Език на поле
* Една двуместна релация - „$<$"

Език на Пеановата аритметика ($\mathcal{L}_{PA}$)

* формално равенство
* 0 - индивидна променлива
* S - едноместен функционален символ („наследник")
* $\cdot, +$ - два двуместни ф.с.
* $<$ - двуместен предикатен символ

Опр. Нека $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ са езици на пред. смятане от първи ред. Казваме, че $\mathcal{L}_2$ е <u>разширение на $\mathcal{L}_1$</u>, ако $Const_{\mathcal{L}_1} \subseteq Const_{\mathcal{L}_2}$, $Func_{\mathcal{L}_1} \subseteq Func_{\mathcal{L}_2}$, $\#_{\mathcal{L}_1}$ и $\#_{\mathcal{L}_2}$ са едни и същи за функ. символите от $\mathcal{L}_1$, ако $\mathcal{L}_1$ е с форм. равенство, то и $\mathcal{L}_2$ е с форм. равенство, $Pred\,\mathcal{L}_1 \subseteq Pred\,\mathcal{L}_2$ и $\#_{\mathcal{L}_1}$ и $\#_{\mathcal{L}_2}$ съвпадат за пред. символите от $\mathcal{L}_1$.

Термове, $T_{\mathcal{L}}$

* индивидните променливи са термове
* индивидните константи са термове
* Ако $\tau_1, \ldots, \tau_n$ са термове, а f е ф.с. от $\mathcal{L}$, такъв че $\#f = n$,

то $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ е също терм.

Индуктивен принцип за доказване на свойства на термове

Нека P е свойство. Нека са в сила:

* инд. променливи имат свойство P
* инд. константи имат свойство P
* Ако $\tau_1, \ldots, \tau_n$ са термове, които имат свойство P, $\#f = n$, то

$f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ също имат свойство P

Тогава всеки терм от f има свойство P.

<u>Тв.1</u> Нека $\mathcal{L}_2$ е разширение $\mathcal{L}_1$. Тогава всеки терм от $\mathcal{L}_1$ е терм от $\mathcal{L}_2$.

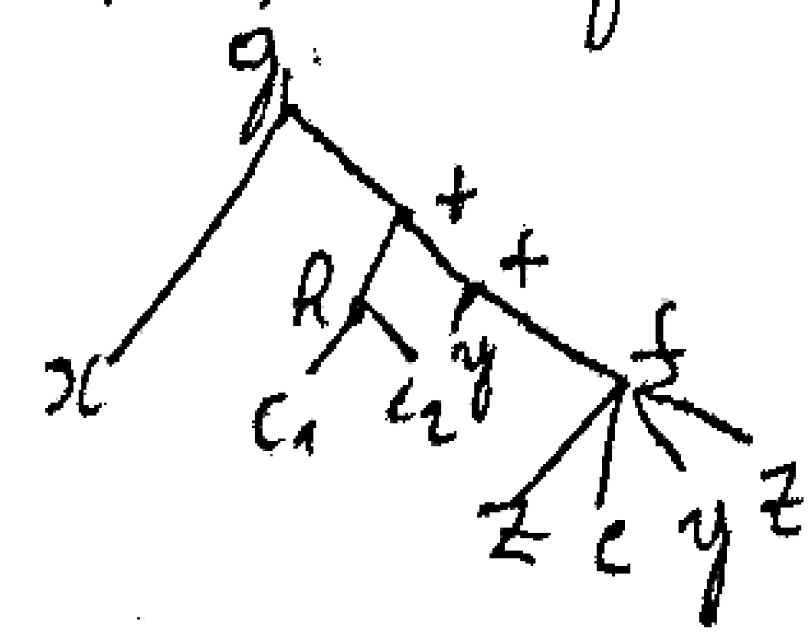
<u>Д-во</u> (индукция отн. построение на термовете. □

<u>Тв.2</u>
(Еднозначен синтактичен анализ на термовете) Нека $\mathcal{L}$ е език на FOL (first-order logic). За всеки терм τ от $\mathcal{L}$ е в сила точно 1 от следните 3 възможности:

* τ е индивидна променлива
* τ е индивидна константа
* съществуват единствен ф.с. f и единствени термове $\tau_1, \ldots, \tau_n$ такива, че $\tau = f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Ако $f(\tau_1, \ldots, \tau_n) = g(x_1, \ldots, x_k)$, то $f = g$, $n = k$ и $\tau_1 = x_1, \ldots, \tau_n = x_k$

<u>Пр.1</u>



$\tau = g(x, +(h(c_1, c_2), +(y, f(z, c, y, z)))) =$

$= g\ x + h\ c_1\ c_2 + y\ f\ z\ c\ y\ z$

$Var(\tau) = \{x, y, c, z\}$

<u>Опр.</u> $Var(\tau) := \{$индивидните променливи, които се срещат в $\tau\}$

инд. отн. τ дефинираме $Var'(\tau)$ така:

* $\tau = x$ ако $Var'(\tau) = \{x\}$
* $\tau = c$ -||- $Var'(\tau) = \emptyset$
* $\tau = f(\tau_1,..,\tau_n)$ -||- $Var'(\tau) = Var'(\tau_1) \cup \dots \cup Var'(\tau_n)$

<u>Тв.3</u> За всеки терм τ: $Var(\tau) = Var'(\tau)$.

<u>Зад.</u> Удобно е да използваме следния запис:

$\tau[x_1,\dots,x_n]$: τ е терм, $x_1,\dots,x_n$ са различни индивидни променливи и $Var(\tau) \subseteq \{x_1,\dots,x_n\}$

<u>Опр.</u> Един терм τ се нарича <u>затворен</u>, ако $Var(\tau) = \emptyset$

<u>Пр.1</u> $+(x,5)$ не е затворен

$+(7,5)$ е затворен

<u>Зад.</u> С $T_{\mathcal{L}}^{cl}$ ще белезим множеството на затворените в $\mathcal{L}$ термове.

<u>Опр.</u> (инд. деф. за затворен терм)

* Инд. константите са затворени термове
* Ако $\tau_1,\dots,\tau_n$ са затворени термове, $\#f = n$, то $f(\tau_1,\dots,\tau_n)$ е

също затворен терм

<u>Тв.4</u> $T_{\mathcal{L}}^{cl} = \emptyset$ iff $Const_{\mathcal{L}} = \emptyset$

<u>Опр.</u> Казваме, че термът τ е <u>подтерм</u> на терма $\varkappa$, ако $\varkappa = \alpha\tau\beta$, където α и β са думи.

Ако $\varkappa = f(\varkappa_1,\dots,\varkappa_k)$, то τ е подтерм на някой от термовете $\varkappa_1,\dots,\varkappa_k$.

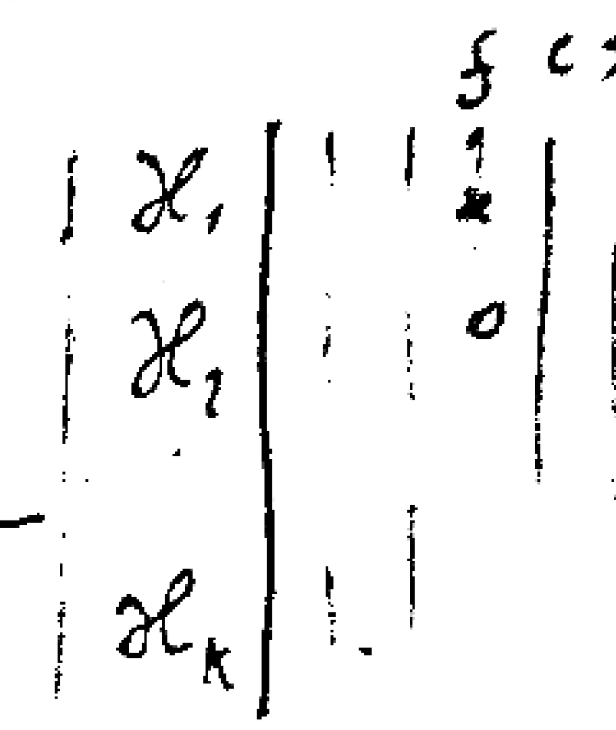
Ако $\varkappa = f(\varkappa_1,\dots,\varkappa_k)$, и τ е подтерм на $\varkappa$, $\varkappa = \alpha\tau\beta$, то за някое i, $1 \le i \le k$

$\varkappa = f(\varkappa_1,\dots,\varkappa_{i-1}, \alpha'\tau\beta', \varkappa_{i+1}, \varkappa_k)$ $\quad \alpha = f(\varkappa_1,\dots,\varkappa_{i-1}, \alpha'$
$\beta = \beta', \varkappa_{i+1},\dots,\varkappa_k)$

Опр. С индукция отн. постр. на τ дефинираме $Subt[\tau]$ по следния начин:

- $\tau = x$ влече $Subt[\tau] := \{x\}$
- $\tau = c$ –"– $Subt[\tau] = \{c\}$
- $\tau = f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ –"– $Subt[\tau] = \{\tau\} \cup Subt[\tau_1] \cup \dots \cup Subt[\tau_n]$

Тв. 5 За всеки два терма τ и $\varkappa$ е в сила еквивалентността τ е подтерм на $\varkappa$ iff $\tau \in Subt[\varkappa]$.



Предикатни формули, $F_\mathcal{L}$

- Атомарните формули от $\mathcal{L}$ са формули от $\mathcal{L}$
- Ако φ е формула от $\mathcal{L}$, то $\neg\varphi$ е ф-ла от $\mathcal{L}$
- Ако φ и ψ са формули от $\mathcal{L}$, то $(\varphi \sigma \psi)$, където $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, е също ф-ла от $\mathcal{L}$

позиция на най-лявото раз-личие.

- Ако φ е формула от $\mathcal{L}$, x е индивидна промен-лива, то $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ са също формули.

Индуктивен принцип за доказване на свойства на фор-мули
Очевиден

Тв. 6 (Еднозначен синтактичен анализ)

Пр. 3 $<(+(0,x), \cdot(y,z))$ – атомарна ф-ла

$0 + x < y \cdot z$ – същата ф-ла с инфиксен запис

$\forall x (0 + x < y \cdot z)$ – неатомарна ф-ла

$\forall z (x < x \cdot x)$

$\forall x \forall y \forall x (x + y < z)$

$\forall x \exists y \exists x (x + x < y)$

Не зависят от „външното" x.

Семантика на език от първи ред

Опр. Нека $\mathcal{L}$ е език от първи ред. Структура за $\mathcal{L}$ ще наричаме наредена двойка от вида $(A, \mathbb{I})$, където A е непразно множество, наречено универсум на обектите, а $\mathbb{I}$ е интерпретация на $\mathcal{L}$ в A:

- $\mathbb{I}(c) \in A$ за всяко $c \in Const_{\mathcal{L}}$
- $\mathbb{I}(f): A^{\#f} \longrightarrow A$
- $\mathbb{I}(p) \subseteq A^{\#p}$

Пр. 4 $\mathcal{L}_{group}: \doteq, e, +$

$A = \{a, b, c\}$

$\mathbb{I}(e) = b$

$\mathbb{I}(+)(a,a) = a$

$\mathbb{I}(+)(a,b) = b$

$\mathbb{I}(+)(a,c) = a$

$\mathbb{I}(+)(b,a) = a$

$\vdots$

Комутативна полугрупа:

$A = \mathbb{N}^+$

$\mathbb{I}(e) = 77$

$\mathbb{I}(+)(a,b) = a \cdot b$

Опр. Нека $\mathcal{A}$ е структура за езика $\mathcal{L}$. Нека универсумът на $\mathcal{A}$ е A. Оценката на индивидните променливи наричаме изображение, $v: Var \longrightarrow A$.

Нека $x \in Var$, а $a \in A$. Тогава модифицирана оценка (в т.х са) ще наричаме $v^x_a(y) := \begin{cases} a, & y = x \\ v(y), & y \neq x \end{cases}$.

$v^x_{v(x)} = v$.

Опр. Нека $\mathcal{A} = (A, \mathbb{I})$ е структура за FOL $\mathcal{L}$. Нека v е оценка на индивидните променливи в $\mathcal{A}$. Индуктивно дефинираме за всеки терм $\tau \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ стойност на τ при оценката v. ($\tau^{\mathcal{A}}[v]$)

- Ако $\tau = x^{\in Var}$, то $x^{\mathcal{A}}[v] = v(x)$
- Ако $\tau = c^{Const}$, то $c^{\mathcal{A}}[v] = \mathbb{I}(c)$
- Ако $f(\tau_1, \dots, \tau_n) = \tau$, $\#f = n$, $f \in Func_{\mathcal{L}}$, то $\tau^{\mathcal{A}}[v] = \mathbb{I}(f)(\tau_1^{\mathcal{A}}[v], \dots, \tau_n^{\mathcal{A}}[v])$

Тази дефиниция е коректна заради еднозначния синтактичен анализ на термовете.

~~Опр.~~ (Индуктивна деф. за стойност на формула φ в A при V) $\|\varphi\|^A[V]$

$\|\varphi\|^A[V] \in \{И, Л\}$

* Ако φ е атомарна формула, то
  * $\varphi = p(\tau_1, \dots, \tau_n)$

    $\|\varphi\|^A[V] := (\tau_1^A[V], \dots, \tau_n^A[V]) \in \mathbb{I}(p)$
  * $\varphi = (\tau_1 \doteq \tau_2)$

    $\|(\tau_1 \doteq \tau_2)\|^A[V] := \tau_1^A[V] = \tau_2^A[V]$

~~Ако~~

* $\|\neg\varphi\|^A[V] := H_\neg(\|\varphi\|^A[V])$
* $\|(\varphi \sigma \psi)\|^A[V] := H_\sigma(\|\varphi\|^A[V], \|\psi\|^A[V])$

* $\varphi = \forall x \psi$

  $\|\forall x \psi\|^A[V] = И$ ~~ако~~ iff за всяко $a \in A : \|\psi\|^A[V_a^x] = И$

* $\varphi = \exists x \psi$

  $\|\exists x \psi\|^A[V] = И$ iff съществува $a \in A : \|\psi\|^A[V_a^x] = И$

Ако $\|\varphi\|^A[V] = И$, то пишем $A \models_V \varphi$ и четем „в A, при оценката V, е вярна формулата φ".

08.11.2018

Заб. Вместо $\mathbb{I}(c)$ ще пишем c^A, където $c \in Const_{\mathcal{L}}$

$\mathbb{I}(f)$ —"— f^A, където $f \in Func_{\mathcal{L}}$

$\mathbb{I}(p)$ —"— p^A, където $p \in Pred_{\mathcal{L}}$

$v: Var \to A$

$\tau \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$

$\tau^A[v] \in A$

$\tau[x_1, \dots, x_n]$: $x_1, \dots, x_n$ са различни и $Var(\tau) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$

$\tau[a_1, a_2] := \tau^A[v]$, където $a_1 = v(x_1)$ и $a_2 = v(x_2)$

$\tau \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{cl}$ (τ е затворен терм)

За произволни v_1 и v_2 $\tau^A[v_1] = \tau^A[v_2]$

$p(\tau_1, \dots, \tau_n) \in Pred_{\mathcal{L}}$

$(\tau_1 \doteq \tau_2) \in At_{\mathcal{L}}$ iff $\tau_1^A[v] = \tau_2^A[v]$

$(\tau_1^A[v], \dots, \tau_n^A[v]) \in p^A$

$\|\neg\varphi\|^A[v] := H_{\neg}(\|\varphi\|^A[v])$

$\|(\varphi \sigma \psi)\|^A[v] := H_{\sigma}(\|\varphi\|^A[v], \|\psi\|^A[v])$, $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

$$v_a^x(y) = \begin{cases} a, & y = x \\ v(y), & y \neq x \end{cases}$$

$\|\forall x \varphi\|^A[v] = И :=$ За всеки елемент $a \in A$, $\|\varphi\|^A[v_a^x] = И$

$\|\exists x \varphi\|^A[v] = И :=$ Съществува елемент $a \in A$, $\|\varphi\|^A[v_a^x] = И$

Ще записваме $\mathcal{A} \models_v \varphi$ вместо $\|\varphi\|^A[v] = И$

$\mathcal{A} \not\models_v \varphi$ вместо $\|\varphi\|^A[v] = Л$

Ще казваме

"В $\mathcal{A}$ при оценката v ф-лата φ е вярна / невярна"

$\mathcal{A} \models_v p(\tau_1, \dots, \tau_n) := (\tau_1^A[v], \dots, \tau_n^A[v]) \in p^A$

$\mathcal{A} \models_v (\tau_1 \doteq \tau_2) := \tau_1^{\mathcal{A}}[v] = \tau_2^{\mathcal{A}}[v]$

$\mathcal{A} \models_v \neg\varphi \quad := \mathcal{A} \not\models \varphi$

$\mathcal{A} \models_v (\varphi \,\&\, \psi) := \mathcal{A} \models \varphi$ и $\mathcal{A} \models \psi$

$\mathcal{A} \models_v (\varphi \vee \psi) := \mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \models \psi$

$\mathcal{A} \models_v (\varphi \Rightarrow \psi) :=$ Ако $\mathcal{A} \models \varphi$, то $\mathcal{A} \models \psi$

$\mathcal{A} \models_v (\varphi \Leftrightarrow \psi) := \mathcal{A} \models_v \varphi$ iff $\mathcal{A} \models_v \psi$

$\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi \quad :=$ за всяко $a \in A$, $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$

$\mathcal{A} \models_v \exists x \varphi \quad :=$ Съществува $a \in A$, $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$

Тв.1 Нека $\mathcal{A}$ е крайна структура и ефект. са зададени интерпретациите на нелогическите символи. Тогава има алгоритъм, който по дадена формула φ разпознава дали ф-лата е вярна или не.

Опр. Нека $\mathcal{A}$ е структура, φ е ф-ла. Казваме, че $\mathcal{A} \models \varphi$ („в $\mathcal{A}$ е вярна φ"), ако за всяка оценка v в $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models_v \varphi$.

Сл.1 (от тв.1) Има алгоритъм, който по дадена ф-ла φ разпознава дали в крайна структура $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$.

Тв.2 Ако v_1 и v_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и за всяка инд. променлива x, участваща във φ, $v_1(x) = v_2(x)$, то $\mathcal{A} \models \varphi$ iff $\mathcal{A} \models \psi$.

Опр. Казваме още, че φ е валидна (общовалидна) в $\mathcal{A}$, ако $\mathcal{A} \models \varphi$

Пр.1 ($\mathcal{A} \models_v \varphi$ или $\mathcal{A} \models_v \neg\varphi$) е вярно

($\mathcal{A} \models \varphi$ или $\mathcal{A} \models \neg\varphi$) не е вярно

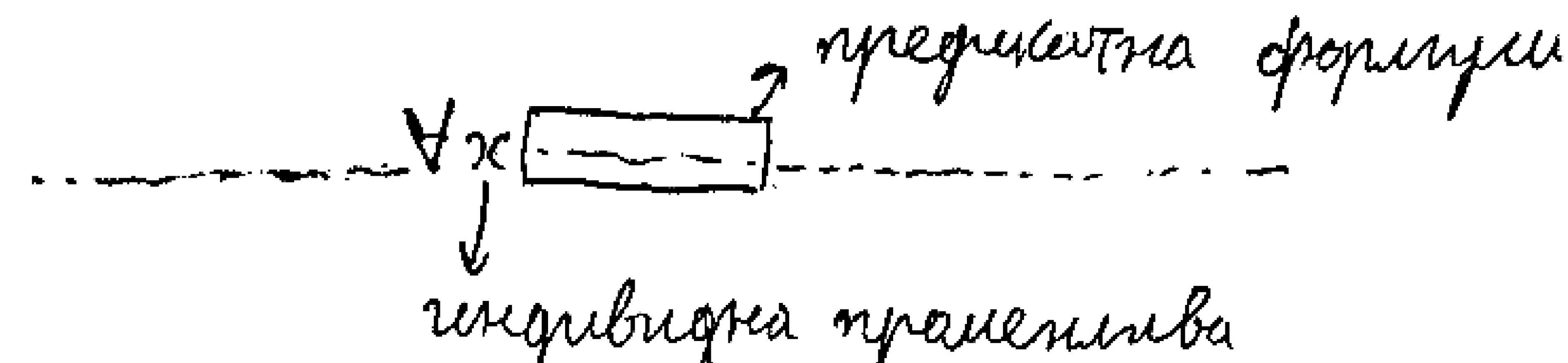
не е посочена оценка, т.е. за всяка оценка

Опр. Казваме, че ф-лата φ е изпълнима, ако същ. структура $\mathcal{A}$ и оценка v, за която $\mathcal{A} \models_v \varphi$. Едно множество формули Γ е изпълнимо, ако съществуват структура $\mathcal{A}$ и оценка v, така че за всяка ф-ла $\varphi \in \Gamma$ $\mathcal{A} \models_v \varphi$. Казваме, че Γ е <u>неизпълнима</u>, ако Γ не е изпълнима.

<u>Опр.</u> Казваме, че φ е <u>предикатна тавтология</u> (общовалидна), ако за всяка структура $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$. Озн. с $\models \varphi$

<u>Пр.2</u> $\left.\begin{array}{l} \varphi \vee \neg\varphi \\ \forall x(\varphi \vee \neg\varphi) \end{array}\right\}$ съждителни и предикатни тавтологии

$\forall x(f(x) < y) \Rightarrow (f(f(z)) < y)$ } предикатна тавтология

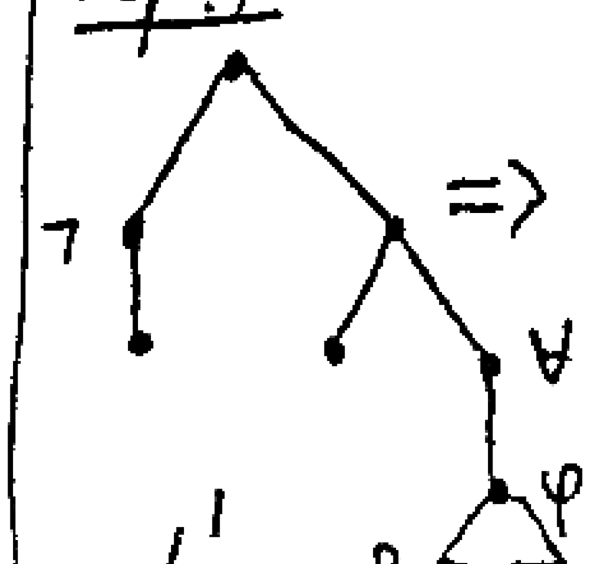


<u>Опр.</u>
Казваме, че φ е <u>подформула</u> на ψ, ако има думи α и β: $\psi = \alpha\varphi\beta$.
Всяка такова двойка α, β определя едно конкретно участие на φ в ψ.

<u>Опр.</u> (индуктивна дефиниция на подформула)
Нека φ е ф-ла. С $Subfor[\varphi]$ ще означаваме множеството от всички подформули на φ.

* Ако φ е атомарна, то $Subfor[\varphi] = \{\varphi\}$
* $Subfor[\neg\varphi] = \{\neg\varphi\} \cup Subfor[\varphi]$
* $Subfor[(\varphi \sigma \psi)] = \{(\varphi\sigma\psi)\} \cup Subfor[\varphi] \cup Subfor[\psi]$, $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
* $Subfor[Qx\varphi] = \{Qx\varphi\} \cup Subfor[\varphi]$, $Q \in \{\forall, \exists\}$

<u>Пр.3</u>



$\overbrace{(}^{\alpha'}\varphi \vee \overbrace{\varphi)}^{\beta'}$, $\underbrace{(}_{\alpha}\varphi \underbrace{\vee \varphi)}_{\beta}$

φ може да се среща на няколко места в ψ

<u>Тв.3</u> Нека ψ е пред. ф-ла, $Q \in \{\forall, \exists\}$ и $\alpha Q \beta$ е конкретно участие на Q във ψ.
Тогава има единствени инд. променлива x и пред. ф-ла φ: $\beta = x\varphi\beta'$, т.е. $\psi = \alpha Q x \varphi \beta'$. Участието на $x\varphi$ във ψ се нарича <u>област на действие на участието</u> на Q във ψ.

свободно участие, свързано участие

<u>Пр.4</u> $(\underbrace{\forall}_{\text{квантор}} x\underbrace{(p(x) \Rightarrow (p(y) \vee p(x))}_{\text{област на действие}}) \;\&\; \forall y(p(x) \vee \exists x \underbrace{\forall y\, p(y)}_{\text{област на действие}}))$

квантори

Опр. Ако участието на Q във φ е $\alpha Q x \psi \beta'$, то това участие на думата $x\psi$ се нарича област на действие на разгледаното участие на Q. Казваме, че квантор(ът) е по променливата x, ако непосредствено след него е x.

Опр. Едно участие на инд. променлива x се нарича свързано участие на x във φ, ако това участие е в област на действие на квантор по x.

Ако едно участие на x във φ не е свързано, то се нарича свободно участие на x във φ.

Опр. Нека φ е предикатна формула. Една променлива x се нарича свободна променлива за φ, ако x има свободно участие във φ. Една променлива се нарича свързана променлива за φ, ако x има свързано участие във φ.

Забел. Една променлива може да бъде както свободна, така и свързана за φ.

$Var^{free}[\varphi]$ - свободни променливи на φ

$Var^{bd}[\varphi]$ - свързани променливи на φ

Опр. (Инд. деф. на $Var^{free}[\varphi]$ и $Var^{bd}[\varphi]$)

- $Var^{free}[p(\tau_1, \ldots, \tau_n)] = Var[\tau_1] \cup Var[\tau_2] \cup \ldots \cup Var[\tau_n]$
- $Var^{free}[\tau_1 \doteq \tau_2] = Var[\tau_1] \cup Var[\tau_2]$

  $Var^{bd}[p(\tau_1, \ldots, \tau_n)] = \emptyset$

  $Var^{bd}[\tau_1 \doteq \tau_2] = \emptyset$

- $Var^{free}[\neg\varphi] = Var^{free}[\varphi]$

  $Var^{bd}[\neg\varphi] = Var^{bd}[\varphi]$

- $Var^{free}[(\varphi_1 \sigma \varphi_2)] = Var^{free}[\varphi_1] \cup Var^{free}[\varphi_2]$

  $Var^{bd}[(\varphi_1 \sigma \varphi_2)] = Var^{bd}[\varphi_1] \cup Var^{bd}[\varphi_2]$

- $Var^{free}[Q x \varphi] = Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\}$

  $Var^{bd}[Q x \varphi] = Var^{bd}[\varphi] \cup \{x\}$

Тв.1 Нека $\mathcal{A}$ е ~~алгебра~~ структура. Тогава за всяка φ е в сила следното: ако v_1 и v_2 са оценки в $\mathcal{A}$. и $v_1 | Var^{free}[\varphi] = v_2 | Var^{free}[\varphi]$, то $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_1] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_2]$.

Д-во Индукция по построението на φ.

* $\varphi = p(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Нека v_1 и v_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $v_1 | Var^{free}[\varphi] = v_2 | Var^{free}[\varphi]$

Нека $1 \le j \le n$. $Var^{free}[\tau_j] \subseteq Var^{free}[\varphi]$. Следователно $v_1 | Var[\tau_j] = v_2 | Var[\tau_j]$

$\tau_j^{\mathcal{A}}[v_1] = \tau_j^{\mathcal{A}}[v_2]$

$\|p(\tau_1, \dots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[v_1]$ iff $(\tau_1^{\mathcal{A}}[v_1], \dots, \tau_n^{\mathcal{A}}[v_1]) \in p^{\mathcal{A}}$ iff

iff $(\tau_1^{\mathcal{A}}[v_2], \dots, \tau_n^{\mathcal{A}}[v_2]) \in p^{\mathcal{A}}$ iff $\|p(\tau_1, \dots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[v_2]$

* $\varphi = \neg \varphi_1$ и за φ_1 твърдението е вярно.

Нека v_1 и v_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $v_1 | Var^{free}[\varphi] = v_2 | Var^{free}[\varphi]$.

Тъй като $Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\varphi_1]$, имаме $v_1 | Var^{free}[\varphi_1] = v_2 | Var^{free}[\varphi_1]$.

Следователно $\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v_1] = \|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v_2]$ (инд. предположение)

$H_{\neg}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v_1]) = H_{\neg}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v_2])$, т.е. $\|\neg\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v_1] = \|\neg\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v_2]$.

* Нека $\varphi = (\varphi_1 \sigma \varphi_2)$, $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ и за φ_1 и φ_2 твърдението е вярно. Нека v_1 и v_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $v_1 | Var^{free}[\varphi] = v_2 | Var^{free}[\varphi]$.

$Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\varphi_1] \cup Var^{free}[\varphi_2]$

За $j = 1, 2$ $Var^{free}[\varphi_j] \subseteq Var^{free}[\varphi]$.

Значи $v_1 | Var^{free}[\varphi_j] = v_2 | Var^{free}[\varphi_j]$. Ето защо можем да приложим инд. хипотеза за φ_j и v_1, v_2. Тогава $\|\varphi_j\|^{\mathcal{A}}[v_1] = \|\varphi_j\|^{\mathcal{A}}[v_2]$.

$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_1] = H_{\sigma}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v_1], \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[v_1]) = H_{\sigma}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v_2], \|\varphi_2\|^{\mathcal{A}}[v_2]) = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_2]$

* $\varphi = Q x \psi$, $Q \in \{\forall, \exists\}$ и за ψ тв. е вярно. Нека v_1 и v_2 са оценки в $\mathcal{A}$ и $v_1 | Var^{free}[\varphi] = v_2 | Var^{free}[\varphi]$. Нека a е произв. ел. на A. Разгл. оценките v_{1a}^{x} и v_{2a}^{x}. $Var^{free}[\psi] \subseteq Var^{free}[\varphi] \cup \{x\}$.

Нека $y \in Var^{free}[\psi]$. Тогава

(а) $y = x$. След. $v_{1a}^{x}(y) = a = v_{2a}^{x}(y)$

(б) $y \neq x$. След. $y \in Var^{free}[\varphi]$, $v_1(y) = v_2(y)$, след. $v_{1a}^{x}(y) = v_{2a}^{x}(y)$

Тогава за всяко $y \in Var^{free}[\psi]$, $v_{1a}^{x}(y) = v_{2a}^{x}(y)$. Трил. инд. хипотеза към ψ за v_{1a}^{x} и v_{2a}^{x}. $\|\psi\|^{A}[v_{1a}^{x}] = \|\psi\|^{A}[v_{2a}^{x}]$.

(а) Ако $Q = \forall$. Нека $\|\psi\|^{A}[v_1] = И$. Тогава за всяко $a \in A$, $\|\psi\|^{A}[v_{1a}^{x}] = И$ след. за всяко $a \in A$, $\|\psi\|^{A}[v_{2a}^{x}] = И$. Значи $\|\psi\|^{A}[v_2] = И$. Аналогично от $\|\varphi\|^{A}[v_2] = И$ следва $\|\varphi\|^{A}[v_1] = И$, т.е.

$$\|\varphi\|^{A}[v_1] = \|\varphi\|^{A}[v_2]$$

(б) $Q = \exists$. Нека $\|\varphi\|^{A}[v_1] = И$. Тогава има $a \in A$, $\|\psi\|^{A}[v_{1a}^{x}] = И$. Така има $a \in A$, $\|\psi\|^{A}[v_{2a}^{x}] = И$. Аналогично $\|\varphi\|^{A}[v_2] = И$ влече $\|\varphi\|^{A}[v_1] = И$. Следователно

$$\|\varphi\|^{A}[v_1] = \|\varphi\|^{A}[v_2].$$

$\square$

<u>Опр.</u> Нека $x_1, \dots, x_n$ са разл. инд. пром., $\{x_1, \dots, x_n\} \supseteq Var^{free}[\varphi]$. Тогава ще пишем $\varphi[x_1, \dots, x_n]$. Нека $a_1, \dots, a_n \in A$. Ако v_1 и v_2 са ел. в A, и $v_j(x_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2$, и

$$\|\varphi\|^{A}[v_1] = \|\varphi\|^{A}[v_2],$$
$$A \models_{v_1} \varphi \text{ iff } A \models_{v_2} \varphi.$$

Тогава вместо $A \models_{v} \varphi$ и $v(x_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$ ще пишем $A \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$

<u>Опр.</u> $Def^{A}(\varphi) := \{(a_1, \dots, a_n) \mid A \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]\}$.
определяно в A с φ множество

<u>Опр.</u> Една ф-ла φ се нарича <u>затворена</u>, ако $Var^{free}[\varphi] = \emptyset$.

<u>Зад.</u> Ако φ е затворена, то е вярно $A \models \varphi$ или $A \models \neg\varphi$.

15.11.2018

φ е *затворена*, ако $Var^{free}[\varphi]=\emptyset$

Тогава е вярно ~~…~~ $\mathcal{A}\models\varphi$ или $\mathcal{A}\not\models\neg\varphi$

$\#(r)=2$, $\mathcal{A}=(A,r^A)$, $r^A\subseteq A\times A$

$A\models\forall x\, r(x,x)$ iff релацията r^A е рефлексивна в A

$\doteq$; $\#(+)$; $f^A: A^2\to A$; $\underbrace{\mathcal{A}\models\forall x\forall y(f(x,y)\doteq f(y,x))}_{\text{комутативност}}$

Т-ма 1 (А. Чърч, А. Тюринг, 1936) Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане от първи ред с поне един двуместен предикатен символ. Тогава няма алгоритъм, който по дадена формула φ да разпознава дали φ е изпълнима или е неизпълнима

~~…~~ Зад.
$\models\varphi$ iff $\neg\varphi$ е неизпълнима

Т-ма 2 Нека $\mathcal{L}$ е език на пред. смятане, в който има само предикатни символи и те са унарни (едноместни). Тогава има алгоритъм, който ~~…~~ разпознава изпълнимите формули от $\mathcal{L}$.
(1912, Л. Льовенхайм)

Нека Γ е множество от формули. Искаме да намерим модел за Γ.

Тв.1 Нека φ е формула, x е инд. променлива, $\mathcal{A}$ е структура за езика, в който е φ. Тогава $\mathcal{A}\models\varphi$ iff $\mathcal{A}\models\forall x\varphi$.

Пр1 $\underbrace{\underbrace{x+y=y+x}_{\varphi}\text{, за произв. } x,y}_{\forall x\forall y\varphi}$

Д-во (на тв.1) Нека в $\mathcal{A}$ е вярна ф-лата φ, т.е. $\mathcal{A}\models\varphi$, т.е. за всяка оценка v в $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\models_v\varphi$.

Нека w е произволна оценка в $\mathcal{A}$. Нека $a\in A$. Да разгледаме w^x_a. Тогава $\mathcal{A}\models_{w^x_a}\varphi$. Следователно $\mathcal{A}\models_w\forall x\varphi$.
Следователно $\mathcal{A}\models\forall x\varphi$.

Обратно, нека $\mathcal{A} \models \forall x \varphi$, т.е. за всяка оценка v и всяко $a \in A$, $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$.

Нека w е произволна оценка в $\mathcal{A}$. $v := w^x_{w(x)}$

За $\mathcal{A} \models_{v^x_{w(x)}} \varphi$, т.е. $\mathcal{A} \models_{v} \varphi$. Но $v = w$, т.е. $\mathcal{A} \models_{w} \varphi$. Така имаме, че $\mathcal{A} \models \varphi$. □

<u>Сл.1</u> Нека $Var^{free} \varphi \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $x_1, \ldots, x_n$ са различни, т.е. $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$. Тогава $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi$ е затворена. Следователно $\mathcal{A} \models \varphi$ iff $\mathcal{A} \models \forall x_1, \ldots, \forall x_n \varphi$.

<u>Пр.2</u> Нека $\mathcal{A}$ е структура и $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi [\![a_1, \ldots, a_n]\!] := \mathcal{A} \models_v \varphi$, където $v(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Разглеждаме $\{(a_1, \ldots, a_n) \mid \mathcal{A} \models \varphi [\![a_1, \ldots, a_n]\!]\}$.

$\varphi := r(x,x)$

$\mathcal{A} \models r(x,x) [\![a]\!]$ iff $(a,a) \in r^{\mathcal{A}}$

$\{a \mid \mathcal{A} \models r(x,x) [\![a]\!]\}$ - мн. от точки, в които r е рефлексивна

<u>Опр.</u> Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език и $\mathcal{A}$ е структура на $\mathcal{L}$. Нека $B \subseteq A^n$ за някое n. Казваме, че <u>B е определимо в $\mathcal{A}$ с формула от $\mathcal{L}$</u>, ако $\exists \varphi$ от $\mathcal{L}$, $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$, такова че

$$\mathcal{A} \models \varphi [\![a_1, \ldots, a_n]\!] \text{ iff } (a_1, \ldots, a_n) \in B. \text{ за произволни } a_1, \ldots, a_n \in A$$

Свойства:

* $\emptyset$ е определимо във всяка структура при всеки език.

  $\varphi[x]$

  $\varphi \& \neg\varphi$ определя $\emptyset$

* A е определимо във всяка структура при всеки език

$\varphi[x]$

$\varphi \vee \neg\varphi \mapsto A$

- A^2

$\varphi[x]$

$\varphi[x,y]$ $\quad \varphi \vee \neg\varphi \mapsto A^2$

- Ако B е определимо и $B \subseteq A^n$, то $A^n \setminus B$ е също определимо

$B: \varphi$, т.е $A^n \setminus B$

$(a_1,\dots,a_n) \in B$ iff $A \models \varphi[a_1,\dots a_n]$

iff $A \not\models \neg\varphi[a_1,\dots,a_n]$ iff $(a_1,\dots,a_n) \notin B$ iff $(a_1,\dots,a_n) \in A^n \setminus B$

- Ако $B_1, B_2 \in A^n$ и са определими, то $B_1 \cup B_1$, $B_1 \cap B_2$, $B_1 \setminus B_2$, $B_1 \Delta B_2$ също са определими

B_1 е определимо, т.е. $\exists \varphi[x_1,\dots,x_n]$, която определя B_1

B_2 ——————————— // — $\exists \psi[x_1,\dots,x_n]$, която определя B_2

Тогава $(\varphi \vee \psi)[x_1,\dots,x_n]$ определя $B_1 \cup B_2$

$(\varphi \& \psi)[x_1,\dots,x_n]$ определя $B_1 \cap B_2$

$(\varphi \& \neg\psi)$ ——— // ——— $B_1 \setminus B_2$

$(\varphi \& \neg\psi) \vee (\neg\varphi \& \psi)$ — // — $B_1 \Delta B_2$

Ако $\{x_1,\dots,x_n\} \cap \{y_1,\dots,y_n\} = \emptyset$ и $\psi'[y_1,\dots,y_n]$ определя B_2, то

$\varphi \vee \psi'$ определя $(B_1 \times A^n) \cup (B_2 \times A^n)$

<u>Тв2</u> Нека $B \subseteq A^n$ е определимо. Нека $x_1,\dots,x_n$ са различни индивидни променливи. Тогава има ф-ла $\varphi[x_1,\dots,x_n]$, която определя B,

Хомоморфизми и изоморфизми

<u>Опр.</u> Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за езика $\mathcal{L}$. Нека $h: A \to B$. Казваме, че h е <u>хомоморфизъм ~~от~~ от $\mathcal{A}$ към $\mathcal{B}$</u>, ако са в сил

* $h(c^{A}) = c^{B}$ за всяка инд. конст. c
* $h(f^{A}(a_1,\dots,a_n)) = f^{B}(h(a_1),\dots,h(a_n))$, $\#(f)=n$, $a_1,\dots,a_n \in A$, $f \in Func$
* $(a_1,\dots,a_n) \in p^{A}$ iff $(h(a_1),\dots,h(a_n)) \in p^{B}$, $\#(p)=n$, $p \in Pred$, $a_1,\dots,a_n \in A$

Казваме, че B е <u>хомоморфен образ на A при h</u>, ако $h[A] = B$.

Казваме, че h е <u>изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$</u>, ако h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ и h е инективна функция.

Ако h е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}$ е хом. образ на $\mathcal{A}$, то казваме, че h е <u>изоморфизъм на $\mathcal{A}$ в-ху $\mathcal{B}$</u>, т.е. ако h е биекция и хомоморфизъм.

Казваме, че <u>$\mathcal{A}$ е изоморфно на $\mathcal{B}$</u>, ако има изоморфизъм на $\mathcal{A}$ в-ху $\mathcal{B}$. Пишем $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Свойства:

* Ако h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ в-ху $\mathcal{B}$, то h^{-1} е изоморфизъм на $\mathcal{B}$ върху $\mathcal{A}$.
* Ако h_1 е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ в-ху $\mathcal{B}$ и h_2 е изоморфизъм на $\mathcal{B}$ върху $\mathcal{F}$, то $h_1 \circ h_2$ е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ в-ху $\mathcal{F}$.
* Id_A е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ в-ху $\mathcal{A}$.

<u>Д-во</u>

* $h: A \to B$, h е биекция. Тогава $h^{-1}: B \to A$ е биекция.

$b_i = h(a_i)$, $a_i \in A$

$$f^{B}(b_1,\dots,b_n) = f^{A}(h(a_1),\dots,h(a_n)) = h(f^{A}(a_1,\dots,a_n)) = h(f^{A}(h^{-1}(b_1),\dots,h^{-1}(b_n)))$$

Следов.

$$h^{-1}(f^{B}(b_1,\dots,b_n)) = h^{-1}(h(f^{A}(h^{-1}(b_1),\dots,h^{-1}(b_n)))) = f^{A}(h^{-1}(b_1),\dots,h^{-1}(b_n))$$

$$(b_1,\dots,b_n) \in p^{B} \overset{?}{\text{iff}} (h^{-1}(b_1),\dots,h^{-1}(b_n)) \in p^{A}.$$

h е биекция: $b_1 = h(a_1),\dots, b_n = h(a_n)$ за някои $a_1,\dots,a_n \in A$.

$(b_1,\dots,b_n) \in p^{B}$ iff $(h(a_1),\dots,h(a_n)) \in p^{B}$ $\overset{\text{хом}}{\text{iff}}$ $(a_1,\dots,a_n) \in p^{A}$ iff $(h^{-1}(a_1),\dots,h^{-1}(a_n)) \in p^{B}$

<u>Опр.</u> h е <u>автоморфизъм в $\mathcal{A}$</u>, ако h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ в-ху $\mathcal{A}$.

- $Id_{\mathcal{A}}$ е автоморфизъм в $\mathcal{A}$
- Ако h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$, то h^{-1} е автоморфизъм в $\mathcal{A}$.
- Ако h_1 и h_2 са автоморфизми в $\mathcal{A}$, то $h_1 \circ h_2$ е също автоморфизъм в $\mathcal{A}$.

Следователно автоморфизмите в $\mathcal{A}$ образуват група относно композиция и неутрален елемент Id_A. Пише се $Aut(\mathcal{A})$.

<u>Опр.</u> Структурите $\mathcal{A}$, които имат само един автоморфизъм – Id_A: се наричат <u>твърди структури</u>.

<u>Пр. 3</u> $(\mathbb{N}, \leq)$ е твърда структура

$(\mathbb{Z}, \leq)$ не е твърда структура:

за всяко $a \in \mathbb{Z}$ изобр. $h_a(m) = m+a$ е авт. в $(\mathbb{Z}, \leq)$

<u>Тв. 1</u> Нека h е хомоморфизъм от $\mathcal{A}$ към $\mathcal{B}$. Нека $\tau[x_1, \dots, x_n]$.

Тогава ~~.....~~ $h(\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]) = \tau^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$.

<u>Д-во</u> Индукция отн. построението на τ.

- $\tau = x$ $\quad \tau[x_1, \dots, x_n]$, след. $x = x_i$ за някое i, $1 \leq i \leq n$.

$x^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!] = a_i$

$h(x^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]) = h(a_i) = x^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$

- $\tau = c$

$h(\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]) = h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}} = \tau^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$

- $\tau = f(\tau_1, \dots, \tau_k)$; за $\tau_1, \dots, \tau_k$ тв. е ~~.....~~ вярно

$\tau[x_1, \dots, x_n]$, след. за всяко j, $1 \leq j \leq k$, $\tau_j[x_1, \dots, x_n]$.

Тогава инд. предп. е изпълнено за τ_j

$$h(\tau^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]) = h(f^{\mathcal{A}}(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!], \dots, \tau_k^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!])) =$$

$$= f^{\mathcal{B}}(h(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]), \dots, h(\tau_k^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!])) = f^{\mathcal{B}}(\tau_1^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!], \dots) =$$

$$= \tau^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$$

□

Тв.2 Нека h е хом. на $\mathcal{A}$ в-ху $\mathcal{B}$. Нека φ е формула без формално равенство. Нека $\varphi[x_1, \dots, x_n]$. Тогава за произволни $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!] \text{ iff } \mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$$

Д-во Инд. отн. постр. на формули

* $\varphi = p(\tau_1, \dots, \tau_n)$

$\mathcal{A} \models p(\tau_1, \dots, \tau_k)[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ iff $(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!], \dots, \tau_k^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]) \in p^{\mathcal{A}}$
iff $(h(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]), \dots, h(\tau_k^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!])) \in p^{\mathcal{B}}$ iff
$(\tau_1^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!], \dots, \tau_k^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]) \in p^{\mathcal{B}}$

* $\varphi = \neg\varphi_1$ и за φ_1 тв. е вярно. $\varphi[x_1, \dots, x_n]$, след. $\varphi_1[x_1, \dots, x_n]$.
$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ iff $\mathcal{A} \not\models \varphi_1[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ iff $\mathcal{B} \not\models \varphi_1[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$
iff $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$.

* $\varphi = (\varphi_1 \& \varphi_2)$ и за φ_1 и φ_2 тв. е вярно. $\varphi[x_1, \dots, x_n]$, след.
$\varphi_i[x_1, \dots, x_n], i = 1, 2$. Нека $a_1, \dots, a_n \in A$.

инд. хипотеза: $\mathcal{A} \models \varphi_i[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ iff $\mathcal{B} \models \varphi_i[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$

$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ iff $\mathcal{A} \models \varphi_1[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ и $\mathcal{A} \models \varphi_2[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ iff
$\mathcal{B} \models \varphi_1[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$ и $\mathcal{B} \models \varphi_n[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$ iff
$\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$

* За $\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ - аналогично

* $\varphi = \exists x \psi$; $\varphi[x_1, \dots, x_n]$; $\psi[x_1, \dots, x_n]$
За ψ тв. е вярно
Нека $a_1, \dots, a_n \in A$.

$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$. Тогава същ. $a \in A$: $\mathcal{A} \models \psi[\![a, a_1, \dots, a_n]\!]$. Тогава
$\mathcal{B} \models \psi[\![h(a), h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$ и за $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$

Нека $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1),\dots,h(a_n)]\!]$. Тогава има $b \in B$:

$\mathcal{B} \models \psi[\![b, h(a_1),\dots,h(a_n)]\!]$. h е сюрекция. След. има $a \in A$: $h(a)=b$.

$\mathcal{B} \models \psi[\![h(a), h(a_1),\dots,h(a_n)]\!]$.

инд. предположение

От $\mathcal{A} \models \psi[\![a,a_1,\dots,a_n]\!]$. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1,\dots,a_n]\!]$.

• $\varphi = \forall x \psi$ и за ψ тв. е вярно; $\varphi[x_1,\dots,x_n]$; $\psi[x,x_1,\dots,x_n]$. Нека $a_1,\dots,a_n \in A$.

- $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1,\dots,a_n]\!]$. Нека a е произв. ел. на A. Тогава $\mathcal{A} \models \psi[a,a_1,\dots,a_n]$

Нека $b \in B$. Избираме $a \in A$, $h(a)=b$. Тогава $\mathcal{B} \models \psi[\![h(a),h(a_1),\dots,h(a_n)]\!]$.

$\mathcal{B} \models \psi[b,h(a_1),\dots,h(a_n)]$. Тогава $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a),\dots,h(a_n)]\!]$.

- $\mathcal{B} \models \varphi[\![a_1,\dots,a_n]\!]$. Нека $a \in A$. Тогава $h(a) \in B$. След. $\mathcal{B} \models \psi[\![h(a),h(a_1),\dots]\!]$.

Инд. пред: $\mathcal{A} \models \psi[\![a,a_1,\dots,a_n]\!]$.

$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1,\dots,a_n]\!]$

□

Тв.5 Нека h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ към $\mathcal{B}$. Нека φ е без форм. равенство.

(1) Ако φ е безкванторна, то

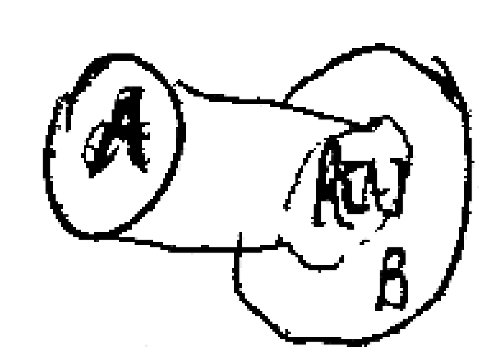
$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ iff $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1),\dots,h(a_n)]\!]$ за произв. $a_1,\dots,a_n \in A$.

(2) Ако $\varphi = \exists y_1 \dots \exists y_n \psi$, където ψ е безкванторна, то за произв. $a_1,\dots,a_n$

$\mathcal{A} \models \exists y_1 \dots y_k \psi[\![a_1,\dots,a_n]\!]$ влече $\mathcal{B} \models \exists y_1 \dots \exists y_n \psi[\![h(a_1),\dots,h(a_n)]\!]$.

(3) Ако $\varphi = \forall y_1 \dots \forall y_k \psi$, ψ е безкванторна. Нека $a_1,\dots,a_n \in A$. Тогава

$\mathcal{B} \models \forall y_1,\dots,y_n \psi[\![h(a_1),\dots,h(a_n)]\!]$ влече $\mathcal{A} \models \forall y_1 \dots y_n \psi[\![a_1,\dots,a_n]\!]$.



22.11.2018

h е ~~хом~~ хомоморфизъм от $\mathcal{A}$ към $\mathcal{B}$
$\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$

$h[A] = B$:

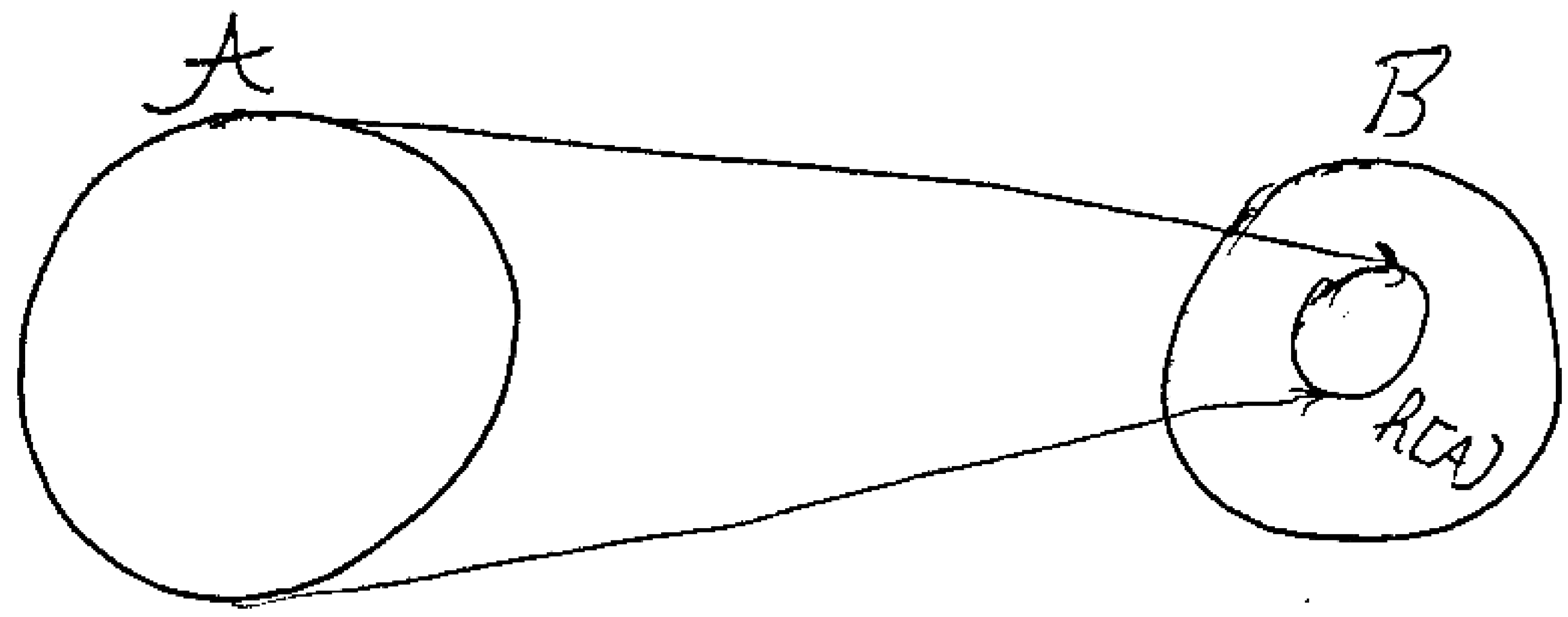
Разгл. език без формално равенство

(1) $\tau[x_1, \dots, x_n]$

$h(\tau^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) = \tau^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$

(2) $\varphi[x_1, \dots, x_n]$

$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ iff $\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$



* φ е безкванторна iff е в сила (*)
* $\varphi = \forall y_1 \dots \forall y_n \psi$, където ψ е безкванторна

$\mathcal{B} \models \varphi[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$ влече $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$

формулите от вида $\forall y_1 \dots \forall y_n \psi$, където ψ е безкванторна, се наричат <u>универсални формули</u>.

* $\varphi = \exists y_1 \dots \exists y_n \psi$, където ψ е безкванторна,

$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$ влече $\mathcal{B} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!]$

формулите от вида $\exists y_1 \dots \exists y_n \psi$, където ψ е безкванторна, се наричат <u>екзистенциални формули</u>.

Ако h е хомоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$ и h е биекция на ~~A~~ A върху B, то h се нарича <u>изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$</u>.

Теорема (за изоморфизмите) Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език от първи ред (с или без формално равенство). Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури над $\mathcal{L}$ и h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$.

Тогава (*)

Д-во ~~[illegible]~~ Подобно на доказателството на теоремата за хомоморфизмите е достатъчно да проверим (*) само за атомарните формули.

Нека $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ е атомарна.

- $\varphi = p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ - вече е доказано.
- $\varphi = (\tau_1 \doteq \tau_2)$

Нека $a_1, \dots, a_n \in A$.

- Ако $\mathcal{A} \models (\tau_1 \doteq \tau_2)[\![a_1, \dots, a_n]\!]$, то $\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!] = \tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]$.

$$h(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]) = h(\tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!])$$

$$\tau_1^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!] \qquad \tau_2^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$$

Следователно $\mathcal{B} \models (\tau_1 \doteq \tau_2)[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$

- Нека $\mathcal{A} \not\models (\tau_1 \doteq \tau_2)[\![a_1, \dots, a_n]\!]$.

$\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!] \neq \tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]$

h е инективна, следователно $h(\tau_1^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]) \neq h(\tau_2^{\mathcal{A}}[\![a_1, \dots, a_n]\!])$

$\tau_1^{\mathcal{B}}[\![a_1, \dots, a_n]\!] \neq \tau_2^{\mathcal{B}}[\![a_1, \dots, a_n]\!]$,

тоест $\tau_1^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!] \neq \tau_2^{\mathcal{B}}[\![h(a_1), \dots, h(a_n)]\!]$. ∘

Разг. структура $\mathcal{A}$. ~~[illegible]~~ $Id_{\mathcal{A}}$ е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{A}$.

- Ако h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$, то h^{-1} е изоморфизъм на $\mathcal{B}$ върху $\mathcal{A}$.
- Ако h_1 е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$ и h_2 е изоморфизъм на $\mathcal{B}$ върху $\mathcal{C}$, то $h = h_2 \circ h_1$ ($h(a) = h_2(h_1(a))$) е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{C}$.

$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} :=$ ∃ същ. изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$.

$\cong$ на структури е отношение на еквив. (не е релация, той като релациите са обвързани с множества)

Ако $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ и h е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$, то h се нарича <u>автоморфизъм</u> в $\mathcal{A}$.

- $Id_{\mathcal{A}}$ е автоморфизъм
- h е автоморфизъм, след. h^{-1} е автоморфизъм
- h_1 и h_2 са автоморфизми в $\mathcal{A}$, то $h_2 \circ h_1$ е автоморфизъм в $\mathcal{A}$.

След. автоморфизмите в една структура образуват група отн. композиция. ($Aut(\mathcal{A})$).

<u>Пр. 1</u> $(\mathbb{N}^0, \leq)$ е твърда структура ($Aut((\mathbb{N}^0, \leq))$ е тривиална група).

$(\mathbb{Z}, \leq)$ не е твърда

<u>Св. 1</u> Нека $B \subseteq A^n$ е определимо в структурата $\mathcal{A}$, която е за език $\mathcal{L}$. Нека h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$. Тогава за произволни $a_1, \ldots, a_n \in A$

$(a_1, \ldots, a_n) \in B$ iff $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in B$

<u>Д-во</u> $B \subseteq A^n$, B е опр.

Нека $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ е ф-ла от $\mathcal{L}$, която определя B в $\mathcal{A}$.

$a_1, \ldots, a_n \in A$.

$(a_1, \ldots, a_n) \in B$ iff $\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$

iff $\mathcal{A} \models \varphi[\![h(a_1), \ldots, h(a_n)]\!]$

iff $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in B$.

$\square$

<u>Св. 2</u> Нека $B \subseteq A^n$ и h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$, ~~[illegible]~~ такъв че за някоя n-торка $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ и

$(a_1, \ldots, a_n) \in B$, но $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \notin B$.

Тогава B не е определимо с формула от $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$.

Логически еквивалентни формули

Опр. Казваме, че φ и ψ са логически еквивалентни ($\varphi \models\!\mid \psi$), ако всеки път, когато $\mathcal{A}$ е структура и v е оценка в $\mathcal{A}$, имаме

$$\mathcal{A} \models_v \varphi \text{ iff } \mathcal{A} \models_v \psi$$

Записано по друг начин, $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v]$.

$$\underbrace{\varphi[x_1, \ldots, x_n]}_{B_\varphi \subseteq A^n}, \quad \underbrace{\psi[x_1, \ldots, x_n]}_{B_\psi \subseteq A^n}$$

$$\varphi \models\!\mid \psi \text{ iff } B_\varphi = B_\psi$$

Ако φ е затворена и $\psi = \varphi$, то $\varphi[x_1]$ определя A или $\emptyset$
$\varphi[x_1, x_2]$ определя A^2 или $\emptyset$

$\mathcal{A}, v \quad \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v]$ iff $H_{\Leftrightarrow}(\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v], \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v]) = И$
iff $\|(\varphi \Leftrightarrow \psi)\|^{\mathcal{A}}[v] = И$
iff $\mathcal{A} \models_v \varphi \Leftrightarrow \psi$

$$\varphi \models\!\mid \psi \text{ iff } \models \varphi \Leftrightarrow \psi$$

Верни са всички еквивалентности за съждителни формули

($\varphi \models\!\mid \varphi$, $(\varphi \& \psi) \models\!\mid (\psi \& \varphi)$, ...)

* $\varphi \Rightarrow \psi \models\!\mid \neg\varphi \vee \psi$
* $\exists x \varphi \models\!\mid \neg \forall x \neg \varphi$
* $\forall x \varphi \models\!\mid \neg \exists x \neg \varphi$
* $\neg \exists x \varphi \models\!\mid \forall x \neg \varphi$
* $\neg \forall x \varphi \models\!\mid \exists x \neg \varphi$

Д-во (на $\neg \exists x \varphi \models\!\mid \forall x \neg \varphi$)

Нека $\mathcal{A}$ е стр., а v е оценка в $\mathcal{A}$.

$- \mathcal{A} \models_v \neg\exists x\varphi$

Нека $a \in A$. Да допуснем, че $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$. Тогава $\mathcal{A} \models_v \exists x\varphi$

$\|\exists x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И$, $H_\neg(\|\exists x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v]) = Л$

~~[illegible]~~. По предположение $\|\neg\exists x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И$.

Следователно $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \neg\varphi$.

a е произволен елемент от A, след. $\mathcal{A} \models_v \forall x \neg\varphi$.

$- \mathcal{A} \not\models_v \neg\exists x\varphi$. Тогава $\mathcal{A} \models_v \exists x\varphi$. Нека a_0 е такова, че $\mathcal{A}_{v_{a_0}^x} \models \varphi$.

Да допуснем, че $\mathcal{A} \models \forall x \neg\varphi$. Тогава за всяко $a \in A$; $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \neg\varphi$, в частност

$\mathcal{A} \models_{v_{a_0}^x} \neg\varphi$ - абсурд. Следователно $\mathcal{A} \not\models_v \forall x \neg\varphi$.

□

* $\forall x(\varphi \& \psi) \models\mid \forall x\varphi \& \forall x\psi$
* $\exists x(\varphi \vee \psi) \models\mid \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
* $\forall x(\varphi \vee \psi) \not\models\mid \forall x\varphi \vee \forall x\psi$
* $\exists x(\varphi \& \psi) \not\models\mid \exists x\varphi \& \exists x\psi$

<u>Д-во</u> (на $\exists x(\varphi \vee \psi) \models\mid \exists x\varphi \vee \exists\psi$)

Нека $\mathcal{A}$ е стр., v е оценка, φ и ψ са ф-ли и x е инд. променлива

$- \mathcal{A} \models_v \exists x(\varphi \vee \psi)$

Тогава нека $a_0 \in A$ е такъв елемент, че ~~[illegible]~~ $\mathcal{A} \models_{v_{a_0}^x} \varphi \vee \psi$, т.е.

$\|(\varphi \vee \psi)\|^{\mathcal{A}}[v_{a_0}^x] = И$, т.е. $H_\vee(\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_{a_0}^x], \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v_{a_0}^x]) = И$

<u>Сл.1</u> $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_{x_0}^x] = И$. Тогава $\|\exists x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И$. Следователно

$H_\vee(\|\exists x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v], \|\exists x\psi\|^{\mathcal{A}}[v]) = И$.

$\|(\exists x\varphi \vee \exists x\psi)\|^{\mathcal{A}}[v] = И$

<u>Сл.2</u> $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v_{a_0}^x] = И$. Тогава $\|\exists x\psi\|^{\mathcal{A}}[v] = И$. След. $H_\vee(\|\exists x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v],$

$\|\exists x\psi\|^{\mathcal{A}}[v]) = И$,

т.е. независимо в кой случай сме, е изпълнено

$\|\exists x\varphi \vee \exists x\psi\|^{\mathcal{A}}[v] = И$. $\mathcal{A} \models_v \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

- $\mathcal{A} \models_v \exists x\varphi \vee \exists x\psi$. Тогава $H_\vee(\|\exists x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v], \|\exists x\psi\|^{\mathcal{A}}[v]) = И$.

Сл.1 $\|\exists x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = И$. Избираме $a_0 \in A : \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}] = И$. Тогава $H_\vee(\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}], \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}]) = И$, т.е. $\|\varphi \vee \psi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}] = И$. Значи $\mathcal{A} \models_v \exists x(\varphi \vee \psi)$.

Сл.2 $\|\exists x\psi\|^{\mathcal{A}}[v] = И$. . .

$\mathcal{A} \models_v \exists x(\varphi \vee \psi)$.

Така независимо в кой случай сме, е изп. $\mathcal{A} \models_v \exists x(\varphi \vee \psi)$ □

* Нека $x \notin Var^{free}[\psi]$. Тогава $\forall x(\varphi \vee \psi) \models\mid \forall x\varphi \vee \psi$

$\exists x(\varphi \,\&\, \psi) \models\mid \exists x\varphi \,\&\, \psi$.

$(\mathcal{A} \models_v \exists x\psi$ iff $\mathcal{A} \models_v \psi)$

Д-во (на $\forall x(\varphi \vee \psi) \models \forall x\varphi \vee \psi$ за $x \notin Var^{free}[\psi]$)

- $\mathcal{A} \models_v \forall x(\varphi \vee \psi)$

Да допуснем, че $\mathcal{A} \not\models_v \forall x\varphi \vee \psi$

$H_\vee(\|\forall x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v], \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v]) = Л$. Тогава $\|\forall x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v] = Л$.

$\|\forall x\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = Л$. Тогава има $a_0 \in A$ $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}] = Л$.

Тъй като $x \in Var^{free}[\psi]$ имаме, че $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v] = Л$.

$a_0 \in A$ и $\mathcal{A} \models_v \forall x(\varphi \vee \psi)$. В частност, $\mathcal{A} \models_{v^x_{a_0}} \varphi \vee \psi$.

$H_\vee(\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}], \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}]) = И$.

Но $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}] = Л$ и $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}] = Л$, поради което $H_\vee(\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}], \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}]) = Л$
което противоречи на предното твърдение.

- $\mathcal{A} \models_v \forall x\varphi \vee \psi$.

Да допуснем, че $\mathcal{A} \not\models_v \forall x(\varphi \vee \psi)$. Тогава избираме $a_0 \in A$: $\mathcal{A} \not\models_{v^x_{a_0}} \varphi \vee \psi$.

Тогава $\mathcal{A} \not\models_{v^x_{a_0}} \varphi$ и $\mathcal{A} \not\models_{v^x_{a_0}} \psi$.

Тогава $\mathcal{A} \not\models_v \forall x\varphi$. Тъй като $\mathcal{A} \not\models_{v^x_{a_0}} \psi$, то $\mathcal{A} \not\models_v \psi$, то $\mathcal{A} \not\models_v \forall x\varphi \vee \psi$. □

Абсурд.

Заместване на подформули с формули

I. В съждителни формули

Нека φ е съжд. формула и $\varphi[P_1, \dots, P_n]$. Нека $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са
Нека $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са предикатни формули.

<u>Тв.1</u> С $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ означаваме резултата от едновременната замяна на P_1 с $\varphi_1, \dots, P_n$ с φ_n. Думата $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ е предикатна формула.

<u>Пр. 1</u> P_1, P_2 – разл. съжд. променливи

$(P_1 \vee P_2) \Rightarrow P_1 =: \varphi$; $\varphi[P_1, P_2, P_3, P_4]$

Нека φ_1 е ф-лата $\forall x\, r(x,x)$, $\varphi_2 := \exists y(r(x,y) \,\&\, r(y,y))$

$\varphi_3 := \forall z\, q(z)$, — над езика $\mathcal{L}$.

$$\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, {}^{P_2}/_{\varphi_2}, {}^{P_3}/_{\varphi_3}, {}^{P_4}/_{\varphi_4}] = (\forall x\, r(x,x) \vee \exists y(r(x,y) \,\&\, r(y,y))) \Rightarrow \forall x\, r(x,x)$$

<u>Д-во</u> (на тв. 1) Индукция отн. построението на съжд. ф-ла φ.

* $\varphi = P_i$, $1 \le i \le n$

$\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}] = \varphi_i$ - пред.

$\varphi = \neg\psi$ и за ψ тв. е вярно

$\varphi[P_1, \dots, P_n]$ влече $\psi[P_1, \dots, P_n]$

$$\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}] = \neg\left[\psi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]\right]$$

Съгл. инд. предп. $\psi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ е пред. ф-ла. След. $\neg\psi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ е съжд. пред ф-ла, т.е. $\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$

* $\varphi = (\psi_1 \sigma \psi_2)$, където $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, за ψ_1 и ψ_2 тв. е вярно.
$\varphi[P_1, \dots, P_n]$, следователно $\psi_1[P_1, \dots, P_n]$ и $\psi_2[P_1, \dots, P_n]$.
Нека $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са пред. формули. Тогава по инд. предположение $\psi_1[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ и $\psi_2[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ са пред. формули.
Следователно $(\psi_1[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]\, \sigma\, \psi_2[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}])$ е пред. формула □

<u>Тв.2</u> Нека $\varphi[P_1,\dots,P_n]$ е съжд. формула и нека $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ са предикатни формули.

Нека I е булева интерпретация, а $\mathcal{A}$ е структура над $\mathcal{L}$ и v е оценка.

Ако $I[P_1]=\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[v],\dots,I[P_n]=\|\varphi_n\|^{\mathcal{A}}[v]$, то $I[\varphi]=\|\varphi[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]\|^{\mathcal{A}}[v]$. $*$

<u>Д-во</u> Инд. относно построението на φ:

* $\varphi=P_i,\ 1\le i\le n$

$I[\varphi]=I[P_i]$

$\varphi[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]=\varphi_i$

$\|\varphi[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]\|^{\mathcal{A}}[v]=\|\varphi_i\|^{\mathcal{A}}[v]=I[P_i]=I[\varphi]$.

* $\varphi=\neg\psi$. и за ψ тв. е вярно.

$I[\varphi]=I[\neg\psi]=H_\neg(I[\psi])$

$\varphi[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]=\neg\psi[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]$

$\|\varphi[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]\|^{\mathcal{A}}[v]=H_\neg(\|\psi[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]\|^{\mathcal{A}}[v])\overset{\text{инд. предположение}}{=}H_\neg(I[\psi])=I[\varphi]$

* $\varphi=(\psi_1\,\sigma\,\psi_2),\ \sigma\in\{\&,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow\}$.

За ψ_1 и ψ_2 тв. е вярно.

$\|\psi_i[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]\|^{\mathcal{A}}[v]=$

$=I[\psi_i]$ за $i=1,2$.

$\|\varphi[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]\|^{\mathcal{A}}[v]=\|(\psi_1[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n]\,\sigma\,\psi_2[P_1/\varphi_1,\dots,P_n/\varphi_n])\|^{\mathcal{A}}[v]$

$=\dots=H_\sigma(I[\psi_1],I[\psi_2])=I[(\psi_1\,\sigma\,\psi_2)]$.

$\square$

29.11.2018

φ - съждителна ф-ла $\varphi[P_1, \dots, P_n]$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - предикатни формули от $\mathcal{L}$

$\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ - предикатна формула от $\mathcal{L}$

$\mathcal{A}, v$; деф. $I[P_j] = \|\varphi_j\|^{\mathcal{A}}[v]$ за $j = 1, \dots, n$

Тв.1
$\|\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]\|^{\mathcal{A}}[v] = I(\varphi)$

Св.1. Ако φ е булева тавтология, то $\models \varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$. Казваме, че φ е тавт. по съждителни причини.

Д-во Нека $\models^{\delta} \varphi$. Тогава при всяка булева интерпретация I, $I(\varphi) = И$. Нека $\mathcal{A}$ е произволна структура, а v е произволна оценка в $\mathcal{A}$.

Дефинираме $I_{\mathcal{A},v}(P_j) := \|\varphi_j\|^{\mathcal{A}}[v]$.

Съгласно тв.1 $\|\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]\|^{\mathcal{A}}[v] = I_{\mathcal{A},v}(\varphi) = И$.

#

Пр.1 (Тавтология, която не е съждителна тавтология)

ψ - предикатна формула

$\models \forall x \psi \Rightarrow \psi$ (1)

$P \Rightarrow \varphi[P_1, \dots, P_n]$
$P \Rightarrow Q$
$\Big\}$ опити да представим (1) като съждителна формула

Пр.2

$$\models \underbrace{\forall x(\psi_1 \Rightarrow \psi_2)}_{\mathcal{A}, v;\ И} \Rightarrow (\underbrace{\forall x \psi_1}_{\mathcal{A}, v;\ И} \Rightarrow \underbrace{\forall x \psi_2}_{\mathcal{A}, v;\ И})$$

(а) $\mathcal{A} \not\models_{v_a^x} \psi_2$

$\mathcal{A} \models_v \forall x(\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$ $\quad\quad$ $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \psi_1 \Rightarrow \psi_2$

$\mathcal{A} \models \forall x \psi_1$ $\quad\quad$ $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \psi_2$

$\|\psi_1\|^{\mathcal{A}}[v_a^x] = И$

$И \Rightarrow (\|\psi_1\|^{\mathcal{A}}[v_a^x], \|\psi_2\|^{\mathcal{A}}[v_a^x]) = И$

Сл.2 Нека φ' и φ'' са съжд. ф. и $\varphi' \models\!\dashv^{\delta} \varphi''$.

Нека $\varphi'[P_1, \dots, P_n]$, $\varphi''[P_1, \dots, P_n]$. Нека $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са произволни предикатни формули от $\mathcal{L}$. Тогава $\varphi'[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}] \models\!\dashv \varphi''[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$

Д-во $\varphi' \models\!\dashv^{\delta} \varphi''$ iff $\models^{\delta} \varphi' \Leftrightarrow \varphi''$, след. $\models \varphi'[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}] \Leftrightarrow \varphi''[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$ iff $\varphi'[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}] \models\!\dashv \varphi''[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]$. ∎

$\neg\forall x \varphi \models\!\dashv \exists x \neg\varphi$

$\forall x(\varphi \vee \psi) \models\!\dashv \forall x\varphi \vee \psi$ ← при предположение, че $x \notin Var^{free}[\psi]$.

Тв.2 (от съждителното смятане) Нека $\varphi[P_1, \dots, P_n]$ ~~[illegible]~~. Нека $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и $\psi_1, \dots, \psi_n$ са произволни съждителни ф-ли и I е δ. инт., т.ч. $I(\varphi_j) = I(\psi_j)$ за $j = 1, \dots, n$.

Тогава $I(\varphi[{}^{P_1}/_{\varphi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\varphi_n}]) = I(\varphi[{}^{P_1}/_{\psi_1}, \dots, {}^{P_n}/_{\psi_n}])$

Пр.3 $\mathcal{A}, v$

$\forall x(r(x) \,\&\, r(y))$

$v(x) = v(y) \in r^{\mathcal{A}}$

Тогава $\mathcal{A} \models_v r(x)$ и $\mathcal{A} \models_v r(y)$

$\mathcal{A} \models_v \forall x\, r(x)$

Взимаме в $\mathcal{A}$ оценка w: $w(y) \neq w(z)$ и $w(y) \in r^{\mathcal{A}}$, $w(z) \notin r^{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A} \models_w \forall x(r(x) \,\&\, r(y))$ iff $\mathcal{A} \models_w \forall x(r(x) \,\&\, r(z))$

Опр. Нека $\mathcal{A}$ е структура. Казваме, че φ и ψ (пред. ф-ли от $\mathcal{L}$) са еквив. в $\mathcal{A}$, $\varphi \overset{\mathcal{A}}{\models\dashv} \psi$, ако за всяка оценка v в $\mathcal{A}$ $\mathcal{A} \models_v \varphi$ iff $\mathcal{A} \models_v \psi$.

$\varphi \overset{\mathcal{A}}{\models\dashv} \psi$ iff $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \psi$.

Тв2 Нека φ е предикатна ф-ла от вида $\varphi = \alpha\varphi'\beta$, където φ' е предикатна ф-ла от същия език. Нека $\mathcal{A}$ е структура. Нека φ'' е предикатна ф-ла, такава че $\varphi' \overset{\mathcal{A}}{\models\dashv} \varphi''$. Тогава $\alpha\varphi'\beta \overset{\mathcal{A}}{\models\dashv} \alpha\varphi''\beta$.

Д-во С инд. отн. построение $\varphi = \alpha\varphi'\beta$

* φ е атомарна и φ' е пред. ф-ла

Тогава $\alpha = \beta = \varepsilon$

$\boxed{\alpha\varphi'\beta} = \varphi' \overset{\mathcal{A}}{\models\dashv} \varphi'' = \underline{\alpha\varphi''\beta}$

* $\varphi = \neg\psi$ и за ψ тв. е вярно
  - $\alpha\varphi'\beta = \neg\psi$, $\alpha = \neg\alpha'$, $\psi = \alpha'\varphi'\beta$

    Тогава $\alpha'\varphi'\beta \overset{\mathcal{A}}{\models\dashv} \alpha'\varphi''\beta$

    След. $\neg\alpha'\varphi'\beta \overset{\mathcal{A}}{\models\dashv} \neg\alpha'\varphi''\beta$
  - $\alpha = \varepsilon$. Тогава $\alpha = \beta = \varepsilon$.

* $\varphi = (\psi_1 \sigma \psi_2)$, за ψ_1, ψ_2 тв е вярно
  - $(\alpha'\varphi'\beta'\sigma\psi_2)$ - инд. пр. за ψ_1: $\alpha'\varphi'\beta' \overset{\mathcal{A}}{\models\dashv} \alpha'\varphi''\beta'$. След. $(\alpha'\varphi'\beta'\sigma\psi_2) \overset{\mathcal{A}}{\models\dashv} (\alpha'\varphi''\beta'\sigma\psi_2)$
  - $(\psi_1 \sigma \alpha'\varphi'\beta')$ - прилагаме инд. пр. за ψ_2 (аналог. на първия сл.)
  - $\varphi' = (\psi_1 \sigma \psi_2)$ - трив. случай

* $\varphi = \forall x \psi$ и за ψ тв. е вярно
  - $\alpha\varphi'\beta = \forall x \alpha'\varphi'\beta$, т.е. $\alpha = \forall x \alpha'$.

    Нека w е оценка в $\mathcal{A}$. Искаме да видим, че

    $\mathcal{A} \vdash \forall x \alpha'\varphi'\beta \Leftrightarrow \forall x \alpha'\varphi''\beta$.

Нека $a \in A$. Да разгл. w_a^x. Тъй като $\varphi' \overset{A}{\models\!\dashv} \varphi''$, то

$\|\varphi''\|^{A}[w_a^x] = \|\varphi'\|^{A}[w_a^x]$

Ако $A \models_w \forall x \alpha' \varphi' \beta$, то $A \models_{w_a^x} \alpha' \varphi' \beta$. Тогава от инд. предположение за ψ получаваме $A \models_{w_a^x} \alpha' \varphi'' \beta$. След. ако $A \models_w \forall x \alpha' \varphi' \beta$, то $A \models_w \forall x \alpha' \varphi'' \beta$.

След. $A \models_w \forall x \alpha' \varphi' \beta$ iff $A \models_w \forall x \alpha' \varphi'' \beta$

$A \models_w \forall x \alpha' \varphi' \beta \Leftrightarrow \forall x \alpha' \varphi'' \beta$

Но w е произв. оценка в A, след. $\forall x \alpha' \varphi' \beta \overset{A}{\models\!\dashv} \forall x \alpha' \varphi'' \beta$

– $\forall x \varphi = \varphi'$ – тривиален случай □

Тв.3
Нека $\varphi = \alpha_0 \varphi_1 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \varphi_n \alpha_n$ и $\psi_1, \dots, \psi_n$ са пред. ф-ли.
Нека A е структура и $\varphi_1 \overset{A}{\models\!\dashv} \psi_1, \dots, \varphi_n \overset{A}{\models\!\dashv} \psi_n$. Тогава
$\alpha_0 \varphi_1 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \varphi_n \alpha_n \overset{A}{\models\!\dashv} \alpha_0 \psi_1 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \psi_n \alpha_n$.

<u>Т-ма</u> (за еквивалентната замяна) Нека $\varphi = \alpha_0 \varphi_1 \alpha_1 \dots \varphi_n \alpha_n$.
Нека $\varphi_1 \models\!\dashv \psi_1, \dots, \varphi_n \models\!\dashv \psi_n$. Тогава $\alpha_0 \varphi_1 \dots \varphi_n \alpha_n \models\!\dashv \alpha_0 \psi_1 \dots \psi_n \alpha_n$.

<u>Д-во</u> Нека $\varphi_1 \models\!\dashv \psi_1, \dots \varphi_n \models\!\dashv \psi_n$. Нека A е произволна структура.
Тогава $\varphi_1 \overset{A}{\models\!\dashv} \psi_1, \dots$ и от предното твърдение получаваме
$\alpha_0 \varphi_1 \dots \varphi_n \alpha_n \overset{A}{\models\!\dashv} \alpha_0 \psi_1, \dots \psi_n \alpha_n$. Но A е произволна структура,
следователно $\alpha_0 \varphi_1 \dots \varphi_n \alpha_n \models\!\dashv \alpha_0 \psi_1 \dots \psi_n \alpha_n$. □

<u>Пр.4</u> $r(x) \& \forall x (p(x,y) \Rightarrow \exists z (r(z) \vee p(z,z)))$ (1)

$\exists z (r(z) \vee p(z,z)) \models\!\dashv \exists z\, r(z) \vee \exists z\, p(z,z)$

След.
(1) $\models\!\dashv r(x) \& \forall x (p(x,y) \Rightarrow (\exists z\, r(z) \vee \exists z\, p(z,z))$.

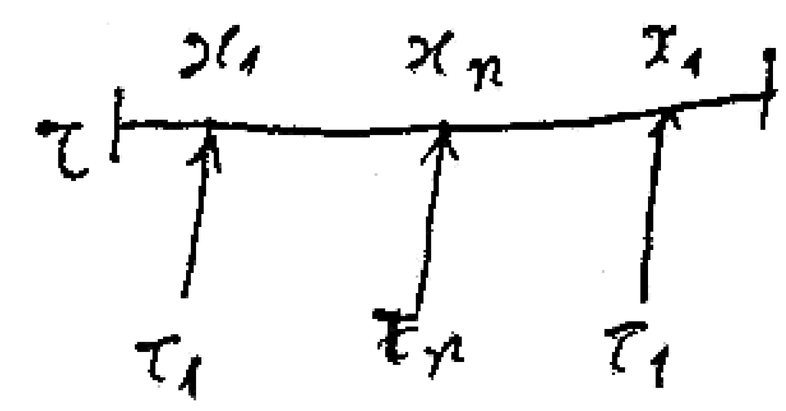
Заместване на индивидни променливи с термове

I. В термове

$\tau[x_1,\dots,x_n]$ и $\tau_1,\dots,\tau_n$ са термове. Тогава $\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}]$ е терм.

Тв.4 Нека v и w са оценки в $\mathcal{A}$ и е изпълнено:

(*) За $1\le i\le n$ $v(x_i)=\tau_i^{\mathcal{A}}[w]$



Тогава $\tau^{\mathcal{A}}[v]=\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}]^{\mathcal{A}}[w]$

Д-во Индукция отн. построението на τ.

* $\tau=x$

$x=x_j$ за някое j, $1\le j\le n$

$\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}]=x_j[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}]=\tau_j$

$\tau^{\mathcal{A}}[v]=v(x)=v(x_j)$

$\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots]^{\mathcal{A}}[w]=\tau_j^{\mathcal{A}}[w]$

* $\tau=c$

$\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}]=c$

$c^{\mathcal{A}}[v]=c^{\mathcal{A}}=c^{\mathcal{A}}[w]$

* $\tau=f(\varkappa_1,\dots,\varkappa_k)$ и за $\varkappa_1,\dots,\varkappa_k$ тв. е вярно

$\tau[x_1,\dots,x_n]$, след. $\varkappa_j[x_1,\dots,x_n]$ за всяко j, $1\le j\le n$.

Разгл. v и w от условието. Тогава за всяко j, $1\le j\le n$,

$\varkappa_j^{\mathcal{A}}[v]=\varkappa_j[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}]^{\mathcal{A}}[w]$

$\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_1}/_{\tau_n}]=f(\varkappa_1[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}],\dots,\varkappa_k[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}])$

$\tau^{\mathcal{A}}[v]=f^{\mathcal{A}}(\varkappa_1^{\mathcal{A}}[v],\dots,\varkappa_k^{\mathcal{A}}[v])=f^{\mathcal{A}}(\varkappa_1[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}]^{\mathcal{A}}[w],\dots,{}^{\mathcal{A}}[w])$

$=f(\varkappa_1[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}],\dots,\varkappa_k[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x_n}/_{\tau_n}])^{\mathcal{A}}[w]=\tau[{}^{x_1}/_{\tau_1},\dots,{}^{x}/_{\tau_n}]^{\mathcal{A}}[w].$ □

II. Във формули

Пр.5

$\exists x(p(x) \vee q(x,y)) \& p(y)$ (1)

Искаме да заместим x/τ, където $\tau = f(z)$ или $\tau = c$

$\exists f(z)(p(f(z)) \vee q(f(z),y)) \& p(y)$ - не е формула

$\exists c(p(c) \vee q(c,y)) \& p(y)$ - не е формула

Ако не заместваме непосредствено след квантора:

$\exists x(p(f(z)) \vee q(f(z),y)) \& p(y)$ - губи се смисълът на (1)

Ако заместим x с $\tau = f(x)$:

$\exists x(p(f(x)) \vee q(f(x),y)) \& p(y)$ - също се губи смисълът на (1).

Ако обаче заместим свободната променлива y с $\tau = f(x)$:

$\exists x(p(x) \vee q(x,f(x))) \& p(f(x))$ - заместили сме свободна променлива, при което увеличихме броя свързани участия.

Опр. Нека φ е предикатна формула, x е индивидна променлива, τ е терм. Резултатът от едновременната замяна на всички свободни участия на x във φ с τ ще озн. с $\varphi[x/\tau]$.

Казваме, че едновременната замяна на свободните участия на x във φ, $\varphi[x/\tau]$, е допустима замяна, ако никое свободно участие на x във φ не е в област на действие на квантор по променлива, участваща в τ)

(Ако няма свободно участие на x във φ, което е в област на действие на квантор по променлива, участваща в τ).

$\underbrace{\forall x(p(x) \vee q(x,y)) \& p(y)}_{\varphi}$. $[z/f(x)]$ е допустима замяна, тъй като $z \notin Var[\varphi]$.

$[x/f(x)]$ е допустима, тъй като $x \notin Var^{free}[\varphi]$

$[y/f(y)]$ и $[y/f(c)]$ са допустими

Наблюдения:

(1) Ако $x \notin Var^{free}[\varphi]$, то за всеки терм τ $\varphi[x/\tau]$ е допустима

(2) Ако τ е затворен терм, то за всяко φ и всяко x $\varphi[x/\tau]$ е допустима замяна

<u>Тв.5</u> Нека $\mathcal{A}$ е стр., φ е ф-ла, x е инд. пр., τ е терм и

$\varphi[x/\tau]$ е допустима замяна.

Нека v и w са оценки в $\mathcal{A}$. Ако

$$(*)\ \begin{cases} v(x) = \tau^{\mathcal{A}}[w] \\ v(y) = w(y) \text{ за всяко } y \in Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\} \end{cases}$$

Тогава $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\varphi[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[w]$, т.е. $\mathcal{A} \models_v \varphi$ iff $\mathcal{A} \models_w \varphi[x/\tau]$.

<u>Д-во</u> Инд. по постр. на φ:

• $\varphi = p(\varkappa_1, \dots, \varkappa_k)$, където $\varkappa_1, \dots, \varkappa_k$ са термове, p е предикатен символ и $\#p = k$.

$\varphi[\overset{x,\tau}{x/\tau}]$ е допустима (това е изпълнено винаги, тъй като във φ няма квантори).

$\varphi[x/\tau] = p(\varkappa_1[x/\tau], \dots, \varkappa_k[x/\tau])$.

$\varkappa_i[x/\tau]$. Искаме да покажем, че

$\varkappa_i^{\mathcal{A}}[v] = \varkappa_i[x/\tau]^{\mathcal{A}}[w]$

$\varkappa_i[x, x_1, \dots, x_m]$.

$\varkappa_i^{\mathcal{A}}[v] = \varkappa_i[x/\tau, x_1/x_1, \dots, x_m/x_m]^{\mathcal{A}}[w] = \varkappa_i[x/\tau]^{\mathcal{A}}[w]$

$\mathcal{A} \models_v p(\varkappa_1, \dots, \varkappa_k)$ iff $(\varkappa_1^{\mathcal{A}}[v], \dots, \varkappa_k^{\mathcal{A}}[v]) \in p^{\mathcal{A}}$ iff $(\varkappa_1[x/\tau]^{\mathcal{A}}[w], \dots) \in p^{\mathcal{A}}$

iff $\mathcal{A} \models_w p(\varkappa_1[x/\tau], \dots, \varkappa_k[x/\tau])$ iff $\mathcal{A} \models_w p(\varkappa_1, \dots, \varkappa_k)[x/\tau]$.

06.12.2018

$\mathcal{A}$, $\tau[x_1, \dots, x_n]$ $\quad \tau_1, \dots, \tau_n$ - произволни термове

Всеки път, когато v и w са оценки в $\mathcal{A}$ и е изпълнено

$v(x_i) = \tau_i^{\mathcal{A}}[w]$ за $i = 1, \dots, n$,

то $\tau^{\mathcal{A}}[v] = \tau[{}^{x_1}/_{\tau_1}, \dots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]^{\mathcal{A}}[w]$

$\mathcal{A}, \varphi, x, \tau$; $\varphi[{}^{x}/_{\tau}]$ е допустима замяна

Ако v и w са оценки в $\mathcal{A}$, такива че

$$\left.\begin{array}{l} v(x) = \tau^{\mathcal{A}}[w] \\ v(y) = w(y) \text{ за всяко } y \in Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\} \end{array}\right\} (*),$$

то $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\varphi[{}^{x}/_{\tau}]\|^{\mathcal{A}}[w]$.

<u>Д-во</u> Инд. отн. построението на φ (продължение)

~~*~~ Ако $x \notin Var^{free}[\varphi]$, то твърдението е очевидно, защото

$y \in Var^{free}[\varphi]$ влече $y \neq x$, следователно $y \in Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\}$,

след. $v(y) = w(y)$ за всяко $y \in Var^{free}[\varphi]$.

$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[w] = \|\varphi[{}^{x}/_{\tau}]\|^{\mathcal{A}}[w]$.

* $\varphi = (\tau_1 \doteq \tau_2)$

$x \in Var^{free}[\varphi] = \{x, x_1, \dots, x_n\}$.

$j = 1, 2$; $\tau_j[x, x_1, \dots, x_n]$

$\tau_j[{}^{x}/_{\tau}, {}^{x_1}/_{x_1}, \dots, {}^{x_n}/_{x_n}] = \tau_j[{}^{x}/_{\tau}]$

$(\tau_1 \doteq \tau_2)[{}^{x}/_{\tau}] = (\tau_1[{}^{x}/_{\tau}] \doteq \tau_2[{}^{x}/_{\tau}])$

$v(x) = \tau^{\mathcal{A}}[w]$

$v(x_i) = w(x_i)$

$\|(\tau_1 \doteq \tau_2)\|^{\mathcal{A}}[v] = И$ iff $\tau_1^{\mathcal{A}}[v] = \tau_2^{\mathcal{A}}[v]$ iff $\tau_1[{}^{x}/_{\tau}]^{\mathcal{A}}[w] = \tau_2[{}^{x}/_{\tau}]^{\mathcal{A}}[w]$

iff $\|(\tau_1[{}^{x}/_{\tau}] \doteq \tau_2[{}^{x}/_{\tau}])\|^{\mathcal{A}}[w] = И$ iff $\|(\tau_1 \doteq \tau_2)[{}^{x}/_{\tau}]\|^{\mathcal{A}}[w] = И$

* $\varphi = \neg\psi$ и за ψ тв. е вярно. Имаме:

$\varphi[x/\tau]$ е допустима и v, w удовл. (*). Тогава условието

(*) за v, w, x, τ и ψ е изпълнено

$\begin{cases} v(x) = \tau^{\mathcal{A}}[w] \\ v(y) = w(y) \text{ за } y \in Var^{free}[\psi] \setminus \{x\} \end{cases}$

Но $Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi]$. Сега можем да приложим инд. предположение за ψ, x, τ, v, w и получаваме $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\psi[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[w]$

След. $H_{\neg}(\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v]) = H_{\neg}(\|\psi[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[w])$

$\|\neg\psi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\neg[\psi[x/\tau]]\|^{\mathcal{A}}[w] = \|[\neg\psi][x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[w]$

$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\varphi[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[w]$

* $\varphi = (\psi_1 \sigma \psi_2)$, $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, ψ_1 и ψ_2 са предикатни формули, за които твърдението е вярно.

Нека x, τ, v и w удовл. условията за φ. ($\varphi[x/\tau]$ е доп, — (*) —)

$j = 1, 2$; $\psi_j[x/\tau]$ е допустима; $(\psi_1 \sigma \psi_2)[x/\tau] = (\psi_1[x/\tau] \sigma \psi_2[x/\tau])$

ψ_j, x, τ, v и w удовл. (*)

$v = \tau^{\mathcal{A}}[w]$

Нека $y \in Var^{free}[\psi_j] \setminus \{x\}$

$Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi_1] \cup Var^{free}[\psi_2]$.

Тогава $y \in Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\}$

След. $v(y) = w(y)$

Така за всяко $y \in Var^{free}[\psi_j] \setminus \{x\}$, $v(y) = w(y)$.

След. $\|\psi_j\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\psi_j[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[w]$.

$H_{\sigma}(\|\psi_1\|^{\mathcal{A}}[v], \|\psi_2\|^{\mathcal{A}}[v]) = H_{\sigma}(\|\psi_1[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[w], \|\psi_2[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[w]) =$

$= \|(\psi_1[x/\tau] \sigma \psi_2[x/\tau])\|^{\mathcal{A}}[w] = \|(\psi_1 \sigma \psi_2)[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[w]$

* Нека $\varphi = Qz\psi$, z е инд. прам., $Q \in \{\exists, \forall\}$, ψ е пред. формула, за която твърдението е вярно. Нека x и τ са такива, че $\varphi[x/\tau]$ е допустима. Нека v и w са оценки, за които (*) е изпълнено.

- $x \in Var^{free}[\varphi]$ влече $z \neq x$; $Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi] \setminus \{z\}$

$Var^{free}[\psi] \subseteq Var^{free}[\varphi] \cup \{z\}$

Нека $a \in A$. Разгл. оценките v_a^z, w_a^z $\quad v_a^z(x) = v(x)$

z не участва в $Var[\tau]$, защото $\left| \begin{array}{l} [Qz\psi][x/\tau] \text{ е допустима} \\ x \in Var^{free}[Qz\psi] \end{array} \right.$

$\tau^{A}[w_a^z] = \tau^{A}[w]$ и $v_a^z(x) = \tau^{A}[w_a^z]$

$y \in Var^{free}[\psi] \setminus \{x\}$ $\begin{cases} y = z & v_a^z(y) = a = w_a^z(y) \\ y \neq z & v_a^z(y) = v(y) = w(y) = w_a^z(y) \end{cases}$

$[Qz\psi][x/\tau] = Qz[\psi[x/\tau]]$

Следователно, за произволен елемент $a \in A$ имаме

$\|\psi\|^{A}[v_a^z] = \|\psi[x/\tau]\|^{A}[w_a^z]$

- $Q = \forall$

Нека $\|\forall z\psi\|^{A}[v] = И$. Тогава за произволно $a \in A$ $\|\psi\|^{A}[v_a^z] = И$. Следователно за произв. $a \in A$ $\|\psi[x/\tau]\|^{A}[w_a^z] = И$.

Значи $\|\forall z[\psi[x/\tau]]\|^{A}[w] = И$, $\|[\forall z\psi][x/\tau]\|^{A}[w] = И$. $\square$

Тв. 6

Нека φ е предикатна формула и замяната $\varphi[x/\tau]$ е допустима. Тогава

$\models \forall x\varphi \Rightarrow \varphi[x/\tau]$

$\models \varphi[x/\tau] \Rightarrow \exists x\varphi$

Д-во Нека φ е произволна формула и $\varphi[x/\tau]$ е допустима. Нека A е структура, за която $A \models \forall x\varphi$. Нека v е оц. в A.

Тогава $\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi$.

$a := \tau^{\mathcal{A}}[v]$

Да разгледаме φ, $\varphi[x/\tau]$, v_a^x, v.

$v_a^x(x) = a = \tau^{\mathcal{A}}[v]$

$y \in Var^{free}[\varphi] \setminus \{x\}$. Тогава $v_a^x(y) = v(y)$

Следователно $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_a^x] = \|\varphi[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[v]$. Тъй като $\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi$, то в частност $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$, т.е. $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_a^x] = И$.

След. $\|\varphi[x/\tau]\|^{\mathcal{A}}[v] = И$, т.е. $\mathcal{A} \models_v \varphi[x/\tau]$. За $\mathcal{A} \models \varphi[x/\tau]$.

$\varphi[x/\tau]$ е допустима. Тогава $\neg\varphi[x/\tau]$ е допустима.

Според $\models \forall x \neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi[x/\tau]$. $\models \varphi[x/\tau] \Rightarrow \neg\forall x \neg\varphi$ по булеви причини.

$\models \exists x \varphi \Leftrightarrow \neg\forall x \neg\varphi$ е тавтология. Според т-мата за еквивалентната замяна $\models \varphi[x/\tau] \Rightarrow \exists x \varphi$. □

Преименуване на свързани променливи

$\forall x p(x)$ и $\forall z p(z)$ са еквивалентни, последното чисто семантично.

<u>Пр.1</u> $p(x) \,\&\, \forall x q(x) \models\!\mid p(x) \,\&\, \forall z q(z) \models\!\mid \forall z (p(x) \,\&\, q(z))$

пример за необходимост от преименуване

<u>Пр.2</u> Искаме да преименуваме x в $Qx\varphi$. Нека $y \neq x$.

$Qy\underbrace{\varphi[x/y]}$

допустима замяна

не трябва да има свободни участия във φ

Разл. $\forall x p(x,y)$ Ако замяната е допустима, но $y \in Var^{free}[\varphi]$, то

$\forall y [p(x,y)[x/y]] = \forall y p(y,y)$ - губи се оригиналният смисъл на ф-лата.

Опр. Казваме, че $Qy\varphi[x/y]$ е вариант на $Qx\varphi$, ако
* $\varphi[x/y]$ е допустима (т.е. свободните участия на x във φ не са в област на действие на квантор по y)
* $y \notin Var^{free}[\varphi]$

Свойства:
* Ако $Qy\varphi[x/y]$ е вариант на $Qx\varphi$, то $Qx\varphi$ е вариант на $Qy\varphi[x/y]$.

Д-во
Нека $Qy\varphi[x/y]$ е вариант на $Qx\varphi$. Тогава $\varphi[x/y]$ е допустима и $y \notin Var^{free}[\varphi]$.

Зам. св. уч. на y във $\varphi[x/y]$ с x: $\varphi[x/y][y/x]$

Свободните участия във $\varphi[x/y]$ са онези места във φ, на които е било свободно уч. на x и то със сигурност не е в област на квантор по y. и онези места във φ, на които y е била свободна. такива няма.

След. свободните участия на y във $\varphi[x/y]$ са точно онези места във φ, на които x е свободна.

Но тези разл. своб. уч. на x във φ, то не е в област на действие на квантор по x. Значи $\varphi[x/y][y/x]$ е допустима.

$x \notin Var^{free}[\varphi[x/y]]$. След. $Qx[\varphi[x/y][y/x]]$ е вариант на $Qy\varphi[x/y]$.

$\varphi[x/y][y/x] = \varphi$

След. $Qx\varphi$ е вариант на $Qy\varphi[x/y]$.

Т-ма (за варианта) Нека $x \neq y$. Нека $Qy\varphi[x/y]$ е вариант на $Qx\varphi$. Тогава $Qx\varphi \models\mid Qy\varphi[x/y]$

Д-во Дост. е да докажем твърдението за $\exists$. Наистина, ако тв. е вярно за $\exists$, то $\exists x\varphi \models\mid \exists y\varphi[x/y]$

$$\exists x\neg\varphi \models\mid \exists y\neg\varphi[x/y]$$
$$\neg\exists x\neg\varphi \models\mid \neg\exists\neg\varphi[x/y]$$
$$\forall x\varphi \models\mid \forall y\varphi[x/y]$$

Искаме да докажем $\exists x\varphi \models\mid \exists y\varphi[x/y]$, което е екв. на $\models \exists x\varphi \Leftrightarrow \exists y\varphi[x/y]$.

Нека $\mathcal{A}$ е структура и v е оценка в $\mathcal{A}$. Да разгледаме $\varphi, \varphi[x/y]$, допустими оц. v и $v^{y}_{v(x)}$.

$v(x) = v^{y}_{v(x)}(y) = y^{\mathcal{A}}[v^{y}_{v(x)}]$.

Нека $z \in Var^{free}[\varphi]\setminus\{x\}$. Тъй като $z \in Var^{free}[\varphi]$ и $y \notin Var^{free}[\varphi]$, то $z \neq y$.

$v(z) = v^{y}_{v(x)}(z)!$

След. $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\varphi[x/y]\|^{\mathcal{A}}[v^{y}_{v(x)}]$.

*Нека $\mathcal{A} \models_{v} \exists x\varphi$. Тогава има $a \in A$: $\mathcal{A} \models_{v^{x}_{a}} \varphi$. Прилагаме предходното наблюдение за $\varphi, \varphi[x/y]$ и v^{x}_{a} и $\underbrace{v^{x\ y}_{a\ v^{x}_{a}(x)}}_{= v^{x\ y}_{a\ a}}$

След. $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^{x}_{a}] = \|\varphi[x/y]\|^{\mathcal{A}}[v^{x\ y}_{a\ a}]$. Но $\mathcal{A} \models_{v^{x}_{a}} \varphi$. Следователно $\|\varphi[x/y]\|^{\mathcal{A}}[v^{x\ y}_{a\ a}] = И$.

$x \notin Var^{free}[\varphi[x/y]]$, след. за всяка св. пром. на $\varphi[x/y]$ $v^{x\ y}_{a\ a}$ и v^{y}_{a} имат една и съща стойност. След. $\|\varphi[x/y]\|^{\mathcal{A}}[v^{y}_{a}] = И$

След. $\|\exists y\varphi[x/y]\|^{\mathcal{A}}[v] = И$, т.е. $\mathcal{A} \models_{v} \exists y\varphi[x/y]$. Тъй като ф-лата $\exists x\varphi$ е вариант на $\exists y\varphi[x/y]$ имаме, че ако $\mathcal{A} \models_{v} \exists y\varphi[x/y]$, то

$A \models_v \exists x \varphi$.

Пренексна нормална форма

<u>Опр.</u> Казваме, че φ е в <u>пренексна нормална форма</u> (ПНФ), ако $\varphi = \underbrace{Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n}_{\text{кванторен префикс}} \underset{\text{матрица}}{\theta}$, където $Q_1, \dots, Q_n$ са квантори, $x_1, \dots, x_n$ са различни индивидни променливи, а θ е безкванторна формула.

Ако $Q_1, \dots, Q_n$ са всичките $\forall$, то казваме, че φ е <u>универсални формули</u> / Π^0_1-формули

Ако $Q_1, \dots, Q_n$ са всичките $\exists$, то казваме, че φ е <u>екзистенциални формули</u> / Σ^0_1-формули

$\forall x_1, \dots, \forall x_n \exists y_1, \dots, \exists y_k \theta$ — Π^0_2-формули

безкванторна

$\exists x_1, \dots, \exists x_n \forall y_1 \dots \forall y_k \theta$ — Σ^0_2-формули

$\Pi^0_n ; \Sigma^0_n, n > 0$ се дефинират аналогично

<u>Пр.1</u> $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$

Π^0_3-формула

<u>Пр.2</u> $\forall L \exists n \forall w_{|w| > n} \exists x, y, z (w = xyz \, \& \, \forall k \; x y^k z \in L)$

Теорема за разрастването на регулярни езици

Π^0_5-формула

<u>Т-ма 1</u> (ПНФ) Има алгоритъм, който по произволна пред. ф-ла φ от $\mathcal{L}$ дава ф-ла ψ:

* ψ е воизо от $\mathcal{L}$
* $Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi]$
* ψ е в ПНФ
* $\varphi \dashv\vdash \psi$

13.12.2018 Пренексна нормална форма:

$Q_1 x_1 Q_2 x_n \dots Q_n x_n \theta$

$x_1, \dots, x_n$ - разл. инд. променливи

$Q_1, \dots, Q_n$ - квантори

θ - безкванторна формула

<u>Т-ма 1</u> $\varphi \rightsquigarrow \psi$ / * ψ е от същия език

* $Var^{free}[\varphi] = Var^{free}[\psi]$
* ψ е в ПНФ
* $\varphi \models\!\!\!| \psi$

<u>Д-во</u> Инд. отн. постр. на φ

* φ е безкванторна

$\psi := \varphi$

* $\varphi = \neg \varphi_1$ и за φ_1 тв. е вярно

$\varphi_1 \rightsquigarrow \psi_1$, $\psi_1 = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \theta$

$\varphi_1 \models\!\!\!| Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \theta$

$\underbrace{\neg\varphi_1}_{\varphi} \models\!\!\!| \neg Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \theta \models\!\!\!| Q_1^\delta x_1 \dots Q_n^\delta x_n \neg\theta$, където $\forall^\delta := \exists$, $\exists^\delta := \forall$

$\neg \forall x \chi \models\!\!\!| \exists x \neg \chi$

$\neg \exists x \chi \models\!\!\!| \forall x \neg \chi$

$\psi := Q_1^\delta x_1 \dots Q_n^\delta x_n \neg Q$

* $\varphi = \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, където за φ_1 и φ_2 тв. е вярно

$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 \models\!\!\!| Q_1^1 x_1 \dots Q_n^1 x_n^1 \theta_1 \\ \varphi_2 \models\!\!\!| Q_1^2 x_1 \dots Q_n^2 x_n^2 \theta_2 \end{array}\right\}$ ПНФ

$\varphi \models\!\!\!| \underbrace{Q_1^1 x_1^1 \dots Q_n^1 x_n^1 \theta_1}_{\psi_1} \Leftrightarrow \underbrace{Q_1^2 x_1^2 \dots Q_k^2 x_k^2 \theta_2}_{\psi_2} \models\!\!\!| (\psi_1 \& \psi_2) \vee (\neg\psi_1 \& \neg\psi_2) \models\!\!\!|$

$\models\!\!\!| (Q_1^1 x_1^1 \dots Q_n^1 x_n^1 \theta_1 \& Q_1^2 x_1^2 \dots Q_k^2 \theta_2) \vee (\neg Q_1^1 \dots \theta_1 \& \neg Q_1^2 \dots \theta_2) \models\!\!\!|$

$\models\!\!\!| (Q_1^1 y_1^1 \dots Q_n^1 y_n^1 \theta_1' \& Q_1^2 y_1^2 \dots Q_k^2 \theta_2') \vee \dots$, където

$y_1^1, \dots, y_n^1, y_1^2 \dots y_k^2$ са различни и не участват в ψ_1 и ψ_2,
а $\theta_1' = \theta_1[x_1^1/y_1^1, \dots, x_n^1/y_n^1]$, $\theta_2' = \theta_2[x_1^2/y_1^2, \dots, x_k^2/y_k^2]$

$\varphi \models\!\!| \; Q_1^1 y_1^1 (Q_2^1 y_2^1 \dots Q_n^1 y_n^1 \theta_1' \,\&\, Q_1^2 y_1^2 \dots Q_k^2 y_k^2 \theta_2') \vee (\dots\dots) \models\!\!|$

$\models\!\!| \; Q_1^1 y_1^1 Q_2^1 y_2^1 (Q_3^1 y_3^1 \dots \theta_1' \,\&\, Q_1^2 y_1^2 \dots Q_k^2 y_k^2 \theta') \vee (\dots\dots) \models\!\!|$

$\models\!\!| \; Q_1^1 y_1^1 \dots Q_n^1 y_n^1 (\theta_1' \,\&\, Q_1^2 y_1^2 \dots Q_k^2 y_k^2 \theta_2') \vee (\dots) \models\!\!|$

$\models\!\!| \; Q_1^1 y_1^1 \dots Q_n^1 y_n^1 Q_1^2 y_1^2 \dots Q_k^2 y_k^2 (\theta_1' \,\&\, \theta_2') \vee (\dots) \models\!\!|$

$\models\!\!| \; Q_1^1 y_1^1 \dots Q_n^1 y_n^1 Q_1^2 y_1^2 \dots Q_k^2 y_k^2 (\theta_1' \,\&\, \theta_2') \vee \underbrace{Q_1^{1\delta} y_1^1 \dots Q_n^{1\delta} y_n^1 Q_1^{2\delta} y_1^2 \dots Q_k^{2\delta} y_k^2}_{(\neg\theta_1 \,\&\, \neg\theta_2)}$

Следователно $\varphi \models\!\!| \; Q_1^1 y_1^1 \dots Q_n^1 y_n^1 Q_1^2 y_1^2 \dots Q_k^2 y_k^2 Q_1^{1\delta} z_1^1 \dots Q_n^{1\delta} z_n Q_1^{2\delta} z_1^2 \dots Q_k^{2\delta} z_k^2 ((\theta_1' \,\&\, \theta_2') \vee (\neg\theta_1'' \,\&\, \neg\theta_2''))$

нови, разл. от $y_1^1 \dots y_n^1$, $y_1^2 \dots y_k^2$ променливи

$\theta_1'' = \theta_1'[y_1^1/z_1^1 \dots y_n^1/z_n^1]$

$\theta_2'' = \theta_2'[y_1^2/z_1^2 \dots y_n^2/z_n^2]$

* $\varphi = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ за φ_1 и φ_2 тв. е вярно

$\varphi \models\!\!| \; \underbrace{\neg\varphi_1 \vee \varphi_2}_{\text{еквив. по сънд. признак}} \models\!\!| \; \neg\psi_1 \vee \psi_2$

* $\varphi = \varphi_1 \,\&\, \varphi_2$ и за φ_1, φ_2 тв. е вярно,

$\varphi \models\!\!| \; \psi_1 \,\&\, \psi_2$

* $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ - аналогично

* $\varphi = Qx\,\varphi_1$ и за φ_1 тв. е вярно; $\varphi_1 \models\!\!| \; \psi_1 \leftarrow$ ПНФ

$\varphi \models\!\!| \; Qx\psi_1 \models\!\!| \; Qx\, Q_1x_1 \dots Q_nx_n \theta_1$

<u>1 сл.</u> $x \in \{x_1 \dots x_n\}$. Тогава $x \notin Var^{free}[Q_1x_1 \dots Q_nx_n\theta_1]$. Тогава

$Qx \underbrace{Q_1 \dots Q_n x_n \theta_1}_{} \models\!\!| \; Q_1x_1 \dots Q_nx_n\theta_1$

не влияе на вътрешната формула

<u>2 сл.</u> $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогава $x, x_1, \dots, x_n$ са разл. и $Qx\, Q_1x_1 \dots Q_nx_n\theta_1$ ← ПНФ

<u>Пр. 3</u>

$\underbrace{\forall x \exists y\, p(x,y)}_{\text{ПНФ}} \Leftrightarrow \underbrace{\exists z_1 \exists z_2\, q(z_1, z_2, z)}_{\text{ПНФ}} =: \varphi$, където

$x \neq y$, $z_1 \neq z_2$ и $z \notin \{z_1, z_2\}$

$\varphi \mathrel{\dashv\vdash} (\forall x \exists y\, p(x,y) \,\&\, \exists z_1 \exists z_2\, q(z_1,z_2,z)) \vee (\neg\forall x \exists y\, p(x,y) \,\&\, \neg\exists z_1 \exists z_2\, q(z_1,z_2,z))$

преименуване

$\mathrel{\dashv\vdash} (\forall x' \exists y'\, p(x',y') \,\&\, \exists z_1' \exists z_2'\, q(z_1',z_2',z)) \vee (\neg\forall x' \exists y'\, p(x',y') \,\&\, \exists z_1' \exists z_2'\, q(z_1',z_2',z))$

$\mathrel{\dashv\vdash} \forall x' (\exists y'\, p(x',y') \,\&\, \exists z_1' \exists z_2'\, q(z_1',z_2',z)) \vee (\exists x' \forall y' \neg p(x',y') \,\&\, \forall z_1' \forall z_2' \neg q(z_1',z_2',z))$

$\mathrel{\dashv\vdash} \forall x' \exists y' \exists z_1' \exists z_2' (p(x',y') \,\&\, q(z_1',z_2',z)) \vee \exists x' \forall y' \forall z_1' \forall z_2' (\neg p(x',y') \,\&\, \neg q(z_1',z_2',z))$

Отново преименуваме:

$\mathrel{\dashv\vdash} \forall x'' \exists y'' \exists z_1'' \exists z_2'' (p(x'',y'') \,\&\, q(z_1'',z_2'',z)) \vee \exists x''' \forall y''' \forall z_1''' \forall z_2''' (\neg p(x''',y''') \,\&\, \neg q(z_1''',z_2''',z))$

$\mathrel{\dashv\vdash} \forall x'' \exists y'' \exists z_1'' \exists z_2'' \exists x''' \forall y''' \forall z_1''' \forall z_2''' ((p(x'',y'') \,\&\, q(z_1'',z_2'',z)) \vee (\neg p(x''',y''') \,\&\, \neg q(z_1''',z_2''',z)))$

Последното е ~~в~~ ПНф

Бихме могли и да получим следния кванторен префикс:

$\underbrace{\exists x''' \forall x'' \exists y'' \exists z_1'' \exists z_2'' \forall y''' \forall z_1''' \forall z_2'''}$

Σ_0^4 формула

$\underbrace{\forall x'' \exists x''' \forall y''' \forall z_1''' \forall z_2''' \exists y'' \exists z_1'' \exists z_2''}$

Π_0^4 формула

Алтернативно:

Да предположим, че x, y, z_1, z_2, z са разл.. Тогава

(1) $\mathrel{\dashv\vdash} \forall x (\exists y\, p(x,y) \,\&\, \exists z_1 \exists z_2\, q(z_1,z_2,z)) \vee (\exists x \forall y \neg p(x,y) \,\&\, \forall z_1 \forall z_2 \neg q(z_1,z_2,z))$

$\mathrel{\dashv\vdash} \forall x \exists y \exists z_1 \exists z_2 (p(x,y) \,\&\, q(z_1,z_2,z)) \vee \exists x (\forall y \neg p(x,y) \,\&\, \forall z_1 \forall z_2 \neg q(z_1,z_2,z))$ ← преименуване в y

$\mathrel{\dashv\vdash} \underbrace{\forall x \exists y \exists z_1 \exists z_2 (p(x,y) \,\&\, q(z_1,z_2,z))}_{\psi} \vee \exists x (\forall y \neg p(x,y) \,\&\, \forall y \forall z_2 \neg q(y,z_2,z))$

$\mathrel{\dashv\vdash} \psi \vee \exists x \forall y (\neg p(x,y) \,\&\, \forall z_2 \neg q(y,z_2,z)) \mathrel{\dashv\vdash}$

$\mathrel{\dashv\vdash} \forall x (\exists y \exists z_1 \exists z_2 (p(x,y) \,\&\, q(z_1,z_2,z)) \vee \exists x \forall y \forall z_2 (\neg p(x,y) \,\&\, \neg q(y,z_2,z)) \mathrel{\dashv\vdash}$

$\mathrel{\dashv\vdash} \forall x (\exists u \exists z_1 \exists z_2 (p(x,u) \,\&\, q(z_1,z_2,z)) \vee \exists u \forall y \forall z_2 (\neg p(u,y) \,\&\, \neg q(y,z_2,z)) \mathrel{\dashv\vdash}$

$\mathrel{\dashv\vdash} \forall x \exists u (\exists z_1 \exists z_2 (p(x,u) \,\&\, q(z_1,z_2,z)) \vee \forall y \forall z_2 (\neg p(x,y) \,\&\, \neg q(y,z_2,z)) \mathrel{\dashv\vdash}$

$\models\!\!\mid \forall x \exists u \exists z_1 \exists z_1 ((p(x,u) \& q(z_1,z_2,z)) \vee \forall y \forall z_2 (\neg p(u,y) \& \neg q(y,z_2,z)) \models\!\!\mid$

$\models\!\!\mid \forall x \exists u \exists z_1 \exists z_2 \forall y (p(x,u) \& q(z_1,z_2,z)) \vee \forall z_2 (\neg p(u,y) \& \neg q(y,z_2,z)) \models\!\!\mid$

преименуване на t

$\models\!\!\mid \underbrace{\forall x \exists u \exists z_1 \exists z_2 \forall y \forall t}_{\text{6 кванторa вместо 8}} ((p(x,u) \& q(z_1,z_2,z)) \vee (\neg p(u,y) \& \neg q(y,t,z))$

Логическо следване

<u>Опр.</u> Нека $\Gamma \cup \{\psi\}$ е мн. от предикатни формули. Казваме, че от Γ <u>логически следва</u> ψ ($\Gamma \models \psi$), ако всеки път, когато $\mathcal{A}$ е структура и v е оценка в $\mathcal{A}$ от $\mathcal{A} \models_v \varphi$ за всяко $\varphi \in \Gamma$ следва, че $\mathcal{A} \models_v \psi$ (секвенциално следване)

<u>Свойства:</u>

* Ако $\varphi \in \Gamma$, то $\Gamma \models \varphi$
* Ако $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \models \varphi$, то $\Delta \models \psi$
* $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ iff $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \psi$
* $\varphi_1, \ldots \varphi_n \models \psi$ iff $\models (\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_n) \Rightarrow \psi$

<u>Тв.1</u> $\Gamma \models \psi$ iff $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ е неизпълнимо

<u>Д-во</u> (Достатъчност) Нека $\Gamma \models \psi$. Да предположим, че $\mathcal{A}$ е структура, v е оценка в $\mathcal{A}$ и всяка формула от $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ е вярна в $\mathcal{A}$ при оценката v.

В частност за всяко $\varphi \in \Gamma$ $\mathcal{A} \models_v \varphi$

Но $\Gamma \models \psi$. След. $\mathcal{A} \models_v \psi$

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A} \models_v \psi \\ \mathcal{A} \models_v \neg\psi \end{array}\right\}$ абсурд

(Необходимост) Нека $\mathcal{A}$ е структура и v е произволна оц. в $\mathcal{A}$. Нека за всяко $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models_v \varphi$. Тогава $\mathcal{A} \not\models_v \neg\psi$.

Тогава $H_\neg(\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v]) \neq И$, след. $\|\psi\|^{\mathcal{A}} = И$.

Значи $\Gamma \models \psi$

Тв. 2 Нека $\Gamma \models \psi$. За всяко $\varphi \in \Gamma$, $x \notin Var^{free}[\varphi]$. Тогава $\Gamma \models \forall x \psi$.

Д-во Нека $\mathcal{A}$ е структура и v е оц. в $\mathcal{A}$. Нека за всяко $\varphi \in \Gamma$ $\mathcal{A} \models_v \varphi$. Нека $a \in A$. Разгл. v_a^x. Тогава за произв. $\varphi \in \Gamma$ имаме: за всяко $y \in Var^{free}[\varphi]$, $v(y) = v_a^x(y)$. Тогава $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_a^x]$, т.е. $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v_a^x] = И$. Тогава за всяко $\varphi \in \Gamma$ $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \varphi$. Тъй като $\Gamma \models \psi$ следва, че $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \psi$. Тъй като a е пр. ел. на A, $\mathcal{A} \models_v \forall x \psi$. Тогава $\Gamma \models \forall x \psi$.

Опр. Казваме, че от Γ глобално (моделно) следва ψ ($\Gamma \models^g \psi$), ако всеки път, когато $\mathcal{A}$ е структура, ~~за~~ ако за всяка $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models \varphi$, то $\mathcal{A} \models \psi$.

Записано на метаезик:

$\forall \mathcal{A}\, \forall v ((\forall \varphi \in \Gamma)\, \mathcal{A} \models_v \varphi \longrightarrow \mathcal{A} \models_v \psi)$ - логическо следване

$\forall \mathcal{A} ((\forall \varphi \in \Gamma)\, \mathcal{A} \models \varphi \rightarrow \mathcal{A} \models \psi)$ следва - моделно следване

„за всяко"

$\forall \mathcal{A}\, \forall v (R \rightarrow S)$ ← логическо следване

$\forall \mathcal{A} (\forall v R \rightarrow \forall v S)$ ← моделно следване

$\models \forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x \varphi \Rightarrow \forall x \psi)$ ← логическо

$\forall x (\varphi \Rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \Rightarrow \forall x \psi$ ← моделно

Тв. 3 Ако $\Gamma \models \psi$, то $\Gamma \models^g \psi$

Д-во Нека $\Gamma \models \psi$, т.е. за пр. $\mathcal{A}$ и v: за вс. $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models_v \varphi$ влекат $\mathcal{A} \models_v \psi$.

Нека $\mathcal{A}$ е стр. Нека за всяка $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models \varphi$. Да разгл. една произв. оценка v в $\mathcal{A}$. Тогава за всяко $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models_v \varphi$. Обаче $\Gamma \models \psi$, откъдето получаваме $\mathcal{A} \models_v \psi$. Следователно $\mathcal{A} \models \psi$.

Тогава $\Gamma \models^g \psi$.

Тв.4 Нека Γ е мн. от затворени формули. Ако $\Gamma \not\vdash \psi$, то $\Gamma \vdash \psi$.
Значи, ако Γ е мн. от затв. ф-ли, то $\Gamma \models \psi$ iff $\Gamma \not\models \psi$.

Д-во Γ – мн. от затв. ф-ли. Освен това $\Gamma \models \psi$. Нека $\mathcal{A}$ е Γ структура и v е произв. оценка в $\mathcal{A}$. Нека за вс. $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models_v \varphi$. Ако v_1 и v_2 са оценки в $\mathcal{A}$, то v_1 и v_2 съвпадат за своб. променливи на формула от Γ. Следователно за всяко $\varphi \in \Gamma$: $\mathcal{A} \models_{v_1} \varphi$ iff $\mathcal{A} \models_{v_2} \varphi$. Тогава за всяка ф-ла φ от Γ и за всяка w-оц. в $\mathcal{A}$ получаваме, че $\mathcal{A} \models_w \varphi$, т.е. получихме, че $\mathcal{A} \models \varphi$ за всяка $\varphi \in \Gamma$. Следователно $\mathcal{A} \models \psi$ и $\Gamma \models \psi$.

Скулемизация (сколемизация)

Ще покажем алгоритъм, който по дадено мн. от затворени ф-ли Γ дава мн. от затв. ф-ли Γ^S, такова че Γ е изпълнимо iff Γ^S е изпълнимо (Γ е неизпълнимо iff Γ^S е неизпълнимо).

* Това преобр. е поточково, т.е. $\Gamma^S = \{\varphi^S \mid \varphi \in \Gamma\}$

~~[illegible]~~

$\Gamma \models \psi$ iff $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ е неизп. iff $\Gamma^S \cup \{(\neg\psi)^S\}$ е неизп.
↑
затв. ф-ли

Ако φ е затворена и е в ПНФ, то φ^S е затворена и универсална, но в разширение на езика.

φ^S ще наричаме Скулемова нормална форма на φ.

Ще деф. едностъпкова скулемизация (от φ ще получаваме φ^S):

* φ^S е затв.
* φ^S е в ПНФ
* φ^S ще има един квантор за $\exists$ по-малко от φ (ако във φ има $\exists$)

$\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \theta$ - затв.

$x_1, \ldots, x_n$ са разл.

$\theta_1, \ldots, \theta_n$ - кванторни

φ_S: (1) Ако $Q = \ldots = Q_n = \forall$, то $\varphi_S \models \varphi$

(2) Ако $Q_1 = \exists$, т.е. $\varphi = \exists x \psi \; (\psi := Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \theta)$, то $\varphi_S := \psi[x/c_\varphi]$, където c_φ е нова инд. прom.

(3) Ако $Q_1 = \ldots = Q_k = \forall$, $Q_{k+1} = \exists$ ($\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists_{k+1} \theta_{k+1} \ldots \theta$),

то $\varphi_S := \forall x_1 \ldots \forall x_k (Q_{k+2} x_{k+2} \ldots Q_n x_n)[x_{k+1} / f_\varphi(x_1, \ldots, x_k)]$, където

f_φ е нов за езика ф.с. с арност k.

Ако в кванторния префикс на π има точно $m > 0$ квантора $\exists$, то $\varphi^S := \underbrace{\varphi_{SSSS\ldots S}}_{m \text{ пъти}}$

20.12.2018

φ - затворена и в ПНФ

1. $\varphi = \exists x \psi$; $\varphi_S = \psi[x/c_\varphi]$ c_φ - нова индивидна константа

2. $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists y \psi$, $k>0$, $\varphi_S = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi[y/f_\varphi(x_1, \dots, x_k)]$

f_φ е нов ф.с., $\# f_\varphi = k$

$\varphi^S = \underbrace{\varphi_{S \dots S}}_{m \text{ пъти}}$, където m е броят на $\exists$ във φ

| φ^S е универсална
| φ^S е разширение на езика

<u>Лема 1</u> Нека φ е затворена формула в ПНФ. Тогава $\models \varphi_S \Rightarrow \varphi$.

Следователно $\models \varphi^S \Rightarrow \varphi$.

<u>Д-во</u>

1. Нека $\varphi = \exists x \psi$. Тогава $\varphi_S = \psi[x/c_\varphi]$, c_φ - нова индивидна константа

Знаем, че $\models \exists x \theta \Rightarrow \theta[x/\tau]$, където $\theta[x/\tau]$ е допустима.

$\models \psi[x/c_\varphi] \Rightarrow \exists x \varphi$

2. Нека $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$. Тогава $\varphi_S = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi[y/f_\varphi(x_1, \dots, x_k)]$

Знаем, че $\models \psi[y/f_\varphi(x_1, \dots, x_k)] \Rightarrow \exists y \psi$. След. ~~[illegible]~~

$\models \forall x_1 \dots \forall x_k (\psi[y/f_\varphi(x_1, \dots, x_n)] \Rightarrow \exists y \psi)$.

Знаем, че $\models \forall x (\theta_1 \Rightarrow \theta_2) \Rightarrow (\forall \theta_1 \Rightarrow \forall x \theta_2)$

$\models \forall x_k (\psi[y/f_\varphi(x_1, \dots, x_k)] \Rightarrow \exists y \psi) \Rightarrow (\forall x_k \psi[y/f_\varphi(x_1, \dots, x_k)] \Rightarrow \forall x_k \exists y \psi)$

$\models \forall x_k (\psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}] \Rightarrow \exists y \psi)$

След. $\models \forall x_k \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}] \Rightarrow \forall x_k \exists y \psi$

след. $\models \forall x_{k-1} (\forall x_k \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}] \Rightarrow \forall x_k \exists y \psi)$

Но $\models \forall x_{k-1}(\forall x_k \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}] \Rightarrow \forall x_k \exists y \psi) \Rightarrow (\forall x_{k-1} \forall x_k \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}] \Rightarrow \forall x_{k-1} \forall x_k \exists y \psi)$

След. $\models \forall x_{k-1} \forall x_k \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}] \Rightarrow \forall x_{k-1} \forall x \exists y \psi$

...

$\models \forall x_1 \dots \forall x_k \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}] \Rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_k \exists y \psi$, т.е. $\models \varphi_S \Rightarrow \varphi$ $\square$

<u>Лема 2</u> Нека φ е затв. ф-ла в ПНФ. Тогава $\models \varphi_S \Rightarrow \varphi$.

Следователно $\models \varphi^S \Rightarrow \varphi$

Д-во

Нека m е броят на $\exists$ във φ:

* $m=0$ $\quad \varphi^S = \varphi$

  $\models \varphi \Rightarrow \varphi$

* $m=1$ $\quad \varphi^S = \varphi_S$

  $\models \varphi_S \Rightarrow \varphi$

  $\models \varphi^S \Rightarrow \varphi$

* $m>1$

$\varphi^S = \varphi_{\underbrace{S\dots S}_{m \text{ пъти}}}$

$\models \varphi_S \Rightarrow \varphi$

$\models \varphi_{SS} \Rightarrow \varphi_S$

$\vdots$

$\models \varphi_{\underbrace{S\dots S}_{m}} \Rightarrow \varphi_{\underbrace{S\dots S}_{m-1}}$

$\{\varphi_s \Rightarrow \varphi, \neg\varphi_{\underbrace{s\ldots s}_{m}} \Rightarrow \varphi_{\underbrace{s\ldots s}_{m-1}}\} \models^{s} \varphi_{\underbrace{s\ldots s}_{m}} \Rightarrow \varphi$

След. $\varphi_{\underbrace{s\ldots s}_{m \text{ пъти}}} \Rightarrow \varphi$, т.е. $\models \varphi^{s} \Rightarrow \varphi$ □

<u>Лема 3</u> Нека φ е затв. ф-ла в ПНФ, $\mathcal{A}$ е структура за езика $\mathcal{L}$ и в $\mathcal{A}$ е вярна φ. Тогава има обогатяване $\mathcal{A}_s$ на $\mathcal{A}$ до структура в разширения език, такава че $\mathcal{A}_s \models \varphi_s$.

След. $\mathcal{A} \models \varphi$ влече, че има обогатяване $\mathcal{A}_s$ на $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^s \models \varphi^s$.

<u>Д-во</u> 1. $\varphi = \exists x \psi$. Тогава $\varphi_s = \psi[x/c_\varphi]$, където c_φ е нова инд. конст.

Нека $\mathcal{A}$ е структура. Нека $\mathcal{A} \models \exists x \psi$. Нека v е пр. оценка.

$\mathcal{A} \models_v \exists x \psi$. След. има $a \in A$: $\mathcal{A} \models_{v^x_a} \psi$.

Нека $a_0 \in A$, $\mathcal{A} \models_{v^x_{a_0}} \psi$. Обогатяваме $\mathcal{A}$ до структура $\mathcal{A}_s$: $c_\varphi^{\mathcal{A}_s} := a_0$

Разгл. $\mathcal{A}^s$, оценката $v^x_{a_0}$, ф-лата $\psi[x/c_\varphi]$

$$\left| \begin{array}{l} v^x_{a_0}(x) = a_0 \\ c_\varphi^{\mathcal{A}_s}[v^x_{a_0}] = a_0 \end{array} \right.$$

За всяка $y \in Var^{free}[\psi] \setminus \{x\}$ имаме $v^x_{a_0}(y) = v^x_{a_0}(y)$.

След. $\|\psi\|^{\mathcal{A}_s}[v^x_{a_0}] = \|\psi[x/c_\varphi]\|^{\mathcal{A}_s}[v^x_{a_0}]$.

Тъй като $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}] = И$,

$\|\psi\|^{\mathcal{A}_s}[v^x_{a_0}] = И$,

получаваме, че $\|\psi[x/c_\varphi]\|^{\mathcal{A}_s}[v^x_{a_0}] = \|\psi\|^{\mathcal{A}}[v^x_{a_0}] = И$, т.е. $\mathcal{A}_s \models_{v^x_{a_0}} \psi[x/c_\varphi]$,

$\psi[{}^{x}/_{c_\varphi}]$ е затв.

След. $A_S \models \psi[{}^{x}/_{c_\varphi}]$

2. $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists y \psi$. Тогава $\psi = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}]$.

$A \models \varphi$. Нека v е произв. оценка в A. Тогава $A \models_v \varphi$. Нека $a_1, \dots, a_k$ са произволни елементи от A. $(v^{x_1}_{a_1})^{x_2}_{a_2} = v^{x_1 x_2}_{a_1 a_2}$; $v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}$ е

коректна оценка, защото $x_1, \dots, x_k$ са различни помежду си.

$A \models_{v^{x_1,\dots,x_k}_{a_1 \dots a_k}} \exists y \psi$. Има $b \in A$: $A \models_{v^{x_1 \dots x_k y}_{a_1 \dots a_k b}} \psi$. Нека $b \in A$, такова че

$A \models_{v^{x_1 \dots x_k y}_{a_1 \dots a_k b}} \psi$. Така за произволни $a_1 \dots a_k \in A$ изобразиме елемент b

с написаното свойство. Значи, получихме функция $F: A^k \to F$:

$F(a_1 \dots a_k) = b$. Така $A \models_{v^{x_1 \dots x_k y}_{a_1 \dots a_k F(a_1 \dots a_k)}} \psi$.

Обогатяваме A до A^S така:

$f_\varphi^{A_S} := F$

$f_\varphi(x_1, \dots, x_k)^{A_S}[v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}] = f_\varphi^{A_S}(x_1^{A_S}[v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}], \dots, x_k^{A_S}[v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}]) =$

$= F(v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}(x_1), \dots, v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}(x_k)) = F(a_1, \dots, a_k)$.

Разгл.

A_S, ψ, $\psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}]$, $v^{x_1 \dots x_k y}_{a_1 \dots a_k F(a_1,\dots,a_k)}$.

$v^{x_1, \dots x_k y}_{a_1 \dots a_k F(a_1 \dots a_k)}(y) = F(a_1, \dots, a_k) = f_\varphi(x_1, \dots, x_k)^{A_S}[v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}]$

$z \in Var^{free}[\psi] \setminus \{y\}$ влече $v^{x_1 \dots x_k y}_{a_1 \dots a_k F(x_1, \dots, x_k)}(z) = v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}(z)$.

Наистина, $z \neq y, a\ y \neq x_1, \dots \neq x_k$

След. $\|\psi\|^{\mathcal{A}_S}[v^{x_1 \dots x_k\, y}_{a_1 \dots a_k\, F(a_1,\dots,a_k)}] = \|\psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}]\|^{\mathcal{A}_S}[v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}]$

$\mathcal{A}_S \models_{v^{x_1 \dots x_k}_{a_1 \dots a_k}} \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}]$. Тъй като $a_1,\dots,a_k$ са произволни, то

$\mathcal{A}_S \models_v \forall x_1 \dots \forall x_k \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}]$.

$\mathcal{A}_S \models \forall x_1 \dots \forall x_k \psi[{}^{y}/_{f_\varphi(x_1,\dots,x_k)}]$.

Нека сега $\mathcal{A} \models \varphi$. Искаме да видим дали $\mathcal{A}^S \models \varphi^S$.

$\varphi^S = \varphi_{\underbrace{S \dots S}_{m \text{ пъти}}}$

Има $\mathcal{A}_S : \mathcal{A}_S \models \varphi_S$. Значи има $(\mathcal{A}_S)_S : \mathcal{A}_{SS} \models \varphi_{SS}$.

Има $(\mathcal{A}_{\underbrace{S \dots S}_{m-1}})_S : \mathcal{A}_{\underbrace{S \dots S}_{m}} \models \varphi_{\underbrace{S \dots S}_{m}}$.

Така, ако $\mathcal{A}^S := \mathcal{A}_{\underbrace{S \dots S}_{m}}$, то $\mathcal{A}^S \models \varphi^S$. □

<u>Т-ма 1</u> 1. Нека φ е затв. ф-ла в пренексна норм. форма. Тогава φ е изпълнима iff φ^S е изпълнима, т.е. φ е неизпълнима iff φ^S е неизпълнима.

2. Нека Γ е мн. от затв. ф-ли в ПНФ. Да озн. с $\Gamma^S = \{\varphi^S \mid \varphi \in \Gamma\}$. Тогава Γ^S е мн. от затв. универсални ф-ли и Γ^S е изпълнимо iff Γ е ~~~~изпълнимо, т.е. Γ^S е неизпълнимо iff Γ е неизпълнимо.

<u>Д-во</u>:
1. (Достатъчност) Нека φ е изпълнима. Т.к. φ е затворена, то има $\mathcal{A} : \mathcal{A} \models \varphi$. Нека $\mathcal{A} : \mathcal{A} \models \varphi$. Съгласно лема 3 има обогатяване $\mathcal{A}^S$ на $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}^S \models \varphi^S$. Значи φ^S е изпълнима.

(Необходимост) Нека φ_s е неизпълнима. Т.к. φ^s е затворена, то има стр. $\mathcal{A}$ за езика и φ_s такава, че $\mathcal{A} \models \varphi^s$. Той като $\models \varphi^s \Rightarrow \varphi$, $\mathcal{A} \models \varphi$. Да обедним $\mathcal{A}$ до структура $\mathcal{A}_0$ за езика на φ. Тогава $\mathcal{A} \models \varphi$ iff $\mathcal{A}_0 \models \varphi$. Следователно $\mathcal{A}_0 \models \varphi$.

2. Ако $\mathcal{A}$ е такава, че $\mathcal{A} \models \Gamma$. Тогава можем да обогатим $\mathcal{A}$ до $\mathcal{A}_1$: $\mathcal{A}_1 \models \varphi_1^s$, ~~...~~ след това $\mathcal{A}_2$: $\mathcal{A}_2$ обогатява $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2 \models \varphi_2^s$. След. $\mathcal{A}_2 \models \{\varphi_1^s, \varphi_2^s\}$. Аналогично $\mathcal{A}_k \models \{\varphi_1^s, \dots, \varphi_k^s\}$.

Аналогично $\mathcal{A} = \bigcup \{\mathcal{A}^s\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$.

<u>Пр. 1</u> $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ е неизп.

$\varphi_1 : \forall x \exists y \psi$; $f : \forall x \psi[y/f(x)]$

$\varphi_2 : \forall z \exists z' \psi$; $g : \forall z \psi[z'/g(z)]$

<u>Пр. 2.</u>

$\forall x_1, \dots, \forall x_n \theta$, θ е безкванторна, $Var^{free}(\theta) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$

Нека $\tau_1, \dots, \tau_n$ са затворени термове.

$\models \forall x_1 \dots \forall x_n \theta \Rightarrow \forall x_2 \dots \forall x_n \theta[x_1/\tau_1]$

$\models \forall x_2 \dots \forall x_n \theta[x_1/\tau_1] \Rightarrow \forall x_3 \dots \forall x_n \theta[x_1/\tau_1][x_2/\tau_2]$

$\models \forall x_n \theta[x_1/\tau_1] \dots [x_{n-1}/\tau_{n-1}] \Rightarrow \theta[x_1/\tau_1] \dots [x_n/\tau_n]$

След. $\models \forall x_1 \dots \forall x_n \theta \Rightarrow \theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$ и $\theta[x_1/\tau_1] \dots [x_n/\tau_n] = \theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$

Затворени универсални формули

Нека $\mathcal{L}$ е език, в който има поне една инд. константа. Нека $\forall x_1 \dots \forall x_n \theta$ е затв., θ е безкванторна и $x_1, \dots, x_n$ са различни. Нека $\tau_1, \dots, \tau_n$ са произволни затворени термове от $\mathcal{L}$. Формулата $\theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$ ще наричаме <u>затворен частен случай</u> на $\forall x_1 \dots \forall x_n \theta$. Множеството на всички затворени частни сл. на универсална затв. ф-ла φ ще озн с $CSI(\varphi)$.

(closed substitution instances), т.е. $CSI(\varphi) := \{\theta[x_1/\tau_1,\dots,x_n/\tau_n] : \tau_1,\dots,\tau_n \in T^{cl}_{\mathcal{L}}\}$

Свойства:

* Нека $\mathcal{A}$ е структура, в която е вярна затв. унив. ф-ла φ. Тогава в $\mathcal{A}$ е верен всеки затворен частен случай на φ.

Γ е мн. от затв. унив. ф-ли, то $CSI(\Gamma) := \bigcup_{\varphi\in\Gamma} CSI(\varphi)$.

Свойства:

* $\mathcal{A} \models \Gamma$ влече $\mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$

Нека Δ е мн. от безкванторни ф-ли от $\mathcal{L}$. Можем да разгл. ф-лите от Δ като съждителни формули над множеството от съжд. променливи $At_{\mathcal{L}}$

$\mathcal{A}, v$ – за всяка $\chi \in At_{\mathcal{L}}$ деф $I_{\mathcal{A},v}(\chi) = \|\chi\|^{\mathcal{A}}[v]$. Тогава за всяка безкванторна ф-ла φ

$$\mathcal{A} \models_v \varphi \text{ iff } I_{\mathcal{A},v}(\varphi) = И.$$

Тогава $\mathcal{A} \models_v \Delta$ влече $I_{\mathcal{A},v} \models^{S} \Delta$.

Тв.1 Нека Γ е множество от затв. универсални ф-ли. Нека $\mathcal{A}$ е структура, такава че за всяко $a \in A$ същ. затворен терм. τ_a, за който $\tau_a^{\mathcal{A}} = a$.

Тогава $\mathcal{A} \models \Gamma$ iff $\mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$.

Д-во (Достатъчност) Съгласно по-предна бележка

(Необходимост) Нека $\mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$. Допускаме, че $\mathcal{A} \not\models \Gamma$. Тогава има $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models \varphi$. Нека $\varphi_0 \in \Gamma$ и $\mathcal{A} \not\models \varphi_0$. $\varphi_0 = \forall x_1 \dots \forall x_n \theta$, $x_1, \dots, x_n$ са разл. и θ е безкванторна.

Тогава има елем. $a_1, \dots, a_n \in A$: $\mathcal{A} \not\models_{v^{x_1 \dots x_n}_{a_1 \dots a_n}} \theta$.

Избираме затв. термове $\tau_1, \dots, \tau_n$:

$\tau_1^{\mathcal{A}} = a_1, \dots, \tau_n^{\mathcal{A}} = a_n$

Разгл. $\mathcal{A}, \theta, \theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n], v, v^{x_1 \dots x_n}_{a_1 \dots a_n}$.

Ако $x \in Var^{free}[\theta]$, $v^{x_1 \dots x_n}_{a_1 \dots a_n}[x] = a_i$

$\tau_1^{\mathcal{A}}[v] = a_1, \dots, \tau_n^{\mathcal{A}}[v] = a_n$

след. $\|\theta\|^{\mathcal{A}}[v^{x_1, \dots x_n}_{a_1, \dots a_n}] = \|\theta[{}^{x_1}/_{\tau_1}, \dots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]\|^{\mathcal{A}}[v]$

след. $\|\theta[{}^{x_1}/_{\tau_1}, \dots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]\|^{\mathcal{A}}[v] = \Lambda$, т.е. $\mathcal{A} \not\models_v \theta[{}^{x_1}/_{\tau_1}, \dots, {}^{x_n}/_{\tau_n}]$.

Но това е невъзможно, т.е. $\theta[{}^{x_1}/_{\tau_1}, \dots, {}^{x_n}/_{\tau_n}] \in CSI(\Gamma)$ и

след. $\mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$. □

Ербранови структури

<u>Опр.</u> Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език. Една структура $\mathcal{H}$ за $\mathcal{L}$ се нарича <u>Ербранова за $\mathcal{L}$</u>, ако

* $H = T_{\mathcal{L}}^{cl}$
* $c^{\mathcal{H}} = c$ за всяка инд. конст от $\mathcal{L}$
* $f^{\mathcal{H}}(\tau_1, \dots, \tau_n) = f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ за ~~всяка~~ всеки ф.с. f, $\# f = n$ за произв. $\tau_1, \dots, \tau_n \in T_{\mathcal{L}}^{cl}$

За $\mathcal{L}$ има поне 1 ербранова стр. iff $T_{\mathcal{L}}^{cl} \neq \emptyset$ iff има поне една инд. константа в $\mathcal{L}$.

<u>Тв.1</u> За всеки затв. терм τ и за всяка ербр. стр. $\mathcal{H}$ $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$.

03.01.2019

$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \underset{\uparrow}{\theta}$
безкванторна

$CSI(\varphi) := \{\theta[^{x_1}/_{\tau_1}, \dots, ^{x_n}/_{\tau_n}] \mid \tau_1, \dots, \tau_n$ - затворени формули$\}$

$CSI(\Gamma) := \bigcup_{\varphi \in \Gamma} CSI(\varphi)$

Лема 1

$\mathcal{A} \models \Gamma$ влече $\mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$

Лема 2 $\mathcal{A}$ - структура.

За вс. $a \in A$ има затв. терм τ_a, такъв че $\tau_a^{\mathcal{A}} = a$.

Тогава $\mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$ влече $\mathcal{A} \models \Gamma$.

Така, ако $\mathcal{A}$ има горното свойство, то $\mathcal{A} \models \Gamma$ iff $\mathcal{A} \models CSI(\Gamma)$

Опр. (Ербранова структура) $\mathcal{H}$ е ербранова, ако

- $H = \mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{cl}$
- $c^{\mathcal{H}} = c$ за $c \in Const_{\mathcal{L}}$
- $f^{\mathcal{H}}(\tau_1, \dots, \tau_n) = f(\tau_1, \dots, \tau_n)$

Тв.1 Един език $\mathcal{L}$ има ербранова структура iff $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{cl} \neq \emptyset$ iff $Const_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$.

Тв.2 За всеки затворен терм τ: $\tau^{\mathcal{H}} = \tau$

Тв.3 Нека Γ е множество от затв. ф-ли в език с $Const_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$. Тогава за всяка ербранова структура $\mathcal{H}$ на $\mathcal{L}$ $\mathcal{H} \models \Gamma$ iff $\mathcal{H} \models CSI(\Gamma)$.

Тв.4 $\mathcal{A}, v$ (структура, оценка). Тогава деф. булевата интерпретация $I_{\mathcal{A},v}$:

$I_{\mathcal{A},v}(\theta) := \|\theta\|^{\mathcal{A}}[v]$ за всяка атомарна формула θ.

За всяка безкванторна φ: $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = I_{\mathcal{A},v}(\varphi)$; $\mathcal{A} \models_v \varphi$ iff $I_{\mathcal{A},v} \models_{B} \varphi$.

Така, ако Δ е множество от безкванторни формули,

$\mathcal{A} \models_v \Delta$ iff $I_{\mathcal{A},v} \models^{\delta} \Delta$.

Ако Δ е изпълнимо, то Δ е булево изпълнимо

Тв. 5

Нека Δ е множество от безкванторни формули в език без формално равенство. Тогава

Δ е изпълнимо iff Δ е булево изпълнимо

Д-во Достатъчността е тв. 4. Остава да докажем необходимостта.

Нека I е булева интерпретация, $I \models^{\delta} \Delta$, т.е. за всяко $\varphi \in \Delta$, $I(\varphi) = И$.

Ако Δ е празно, то твърдението е тривиално.

$\Delta \neq \emptyset$. Значи, в езика $\mathcal{L}$ има поне една индивидна константа. Тогава, има ербранови структури за $\mathcal{L}$.

$(\tau_1, \dots, \tau_n) \in p^{\mathcal{H}}$ iff $I(p(\tau_1, \dots, \tau_n)) = И$.

затв. термове — произволен n-арен предикат

$\mathcal{H} \models_{Id} p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ iff $(\tau_1^{\mathcal{H}}[Id], \tau_2^{\mathcal{H}}[Id], \dots, \tau_n^{\mathcal{H}}[Id]) \in p^{\mathcal{H}}$

iff $(\tau_1, \dots, \tau_n) \in p^{\mathcal{H}}$. Така $\mathcal{H} \models_{Id} p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ iff $I(p(\tau_1, \dots, \tau_n)) = И$

$I_{\mathcal{H}, Id} = I$. Следователно ~~[illegible]~~ $\mathcal{H} \models_{Id} \varphi$ iff $I(\varphi) = И$,

т.е. $\mathcal{H} \models \varphi$ iff $I(\varphi) = И$. Значи, $\mathcal{H} \models \Delta$ iff $I \models^{\delta} \Delta$. Значи

$I \models^{\delta} \Delta$, поради което $\mathcal{H} \models \Delta$.

$\square$

Зоб. Интерпретацията на формалното равенство в ербранова структура е „графичното" равенство на термове. ~~[illegible]~~

Така, ако Δ е множество от затворени формули без формално равенство. Δ е булево изпълнимо iff Δ има ербранов модел.

T-ма 1 Нека Γ е множество от затв. универсални формули в език с поне една инд. конст. и без формално равенство. Тогава следните са еквивалентни:

(1) Γ има модел

(2) Γ има ербранов модел

(3) $CSI(\Gamma)$ има ербранов модел

(4) $CSI(\Gamma)$ има модел

(5) $CSI(\Gamma)$ е булево изпълнимо

Д-во Вече видяхме, че (2) iff (3) и (3) iff (5). От (3) следва (4) по тривиални причини, а от (4) следва (5) по тв. 4. От (2) следва (1), а от лема 1 (1) влече (4). □

Тв 6 Γ има модел iff $CSI(\Gamma)$ е булево изпълнимо

следователно,

Γ е неизпълнимо iff $CSI(\Gamma)$ е булево неизпълнимо.

Сл. 1 (от Тв. 6) (1) Нека Γ е множество от затворени универсални формули в език с поне 1 инд. конст. и без формално равенство. Тогава има алгоритъм, който ~~спира~~ спира работа точно тогава, когато Γ е неизпълнимо и работи до безкрай, когато Γ е изпълнимо

(2) Ако допълнително в езика няма функционални символи, то има алгоритъм, който винаги завършва работа за краен брой стъпки и разпознава дали Γ е изпълнимо.

Тъй като в езика няма функционални символи, затворените термове са само индивидните константи. Но Γ е крайно множество, следователно инд. конст., които имат значение, са краен брой.

Следователно $CSI(\Gamma)$ е крайно.

Т-ма (Чърч - Тюринг)

Нека $\mathcal{L}$ е език с поне един предикатен символ с арност ≥ 2. Тогава няма алгоритъм, който по дадена затворена формула да разпознава дали тя е предикатна тавтология.

Еквивалентно, няма алгоритъм, който да разпознава дали тя е предикатна тавтология.

Т-ма 3

Нека φ е Π_0^2-формула, т.е. $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_k \theta$, θ е безкванторна, φ е затворена. Нека във φ няма функционални символи (без формално равенство).

Тогава има алгоритъм, който разпознава дали φ е предикатна тавтология. Нещо повече, има алг., който в случай, че φ не е предикатна тавтология, дава крайна структура $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Д-во $\models \varphi$ iff $\{\neg\varphi\}$ е неизп. iff $\{\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y_1 \dots \forall y_k \neg\theta\}$ е неизп. iff $\{\forall y_1 \dots \forall y_k \neg\theta[x_1/c_1, \dots, x_n/c_n]$, $c_1, \dots, c_n$ - нови инд. константи$\}$ е неизпълнима iff $\{\forall y_1 \dots \forall y_k \neg\theta[x_1/c_1, \dots, x_n/c_n]\}$ няма ербранов модел.

Ербрановият универсум, т.е. затв. термове са $n+l$, където l е броят на индивидните константи във φ, т.е. универсумът е краен □

Съждителна резолюция

Интересуваме се от метод за разпознаване на изпълнимост на съждителни формули.

Нека φ е съждителна формула

$\varphi \dashv\vdash \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n$, където ψ_i са елементарни дизюнкции.

Той като $\theta \vee \theta \dashv\vdash \theta$, на всяка елементарна дизюнкция ψ ще съпоставим крайното множество от литералите (т.е. p или $\neg p$), които участват във формулата ψ.

$\psi \to \mathcal{D}_\psi$

крайно множество от литерали

$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_k$ - $L_1, \ldots, L_k$ са литерали

$I \models^{\delta} L_1 \vee \ldots \vee L_k$ iff същ. i, $1 \le i \le k$, $I \models L_i$.

Следователно за едно крайно множество от литерали от $\mathcal{D}_\psi$,

$I \models \mathcal{D}_\psi$ iff има литерал $L \in \mathcal{D}_\psi$, $I \models^{\delta} L$. Така $I \models^{\delta} \psi$ iff $I \models^{\delta} \mathcal{D}_\psi$.

<u>Опр.</u> <u>Дизюнкт $\mathcal{D}$ ще наричаме крайно множество от</u> литерали. I е булева интерпретация. Казваме, че $I \models^{\delta} \mathcal{D}$, ако съществува $L \in \mathcal{D}$, $I \models^{\delta} L$.

ψ е елем. диз., след. $\mathcal{D}_\psi$ е дизюнкт, $I \models \psi$ iff $I \models \mathcal{D}_\psi$.

Ако $\mathcal{D} \neq \emptyset$ и $\mathcal{D}$ е дизюнкт, то има формула ψ, такава че $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\psi$.

Има само един дизюнкт, който не е от вида $\mathcal{D}_\psi$ за някоя елементарна дизюнкция ψ. Това е празното множество от литерали. Този дизюнкт ще наричаме <u>празен дизюнкт</u> и ще го озн. с $\blacksquare$.

Нека I е булева интерпретация. $\blacksquare$ не е верен за всяка булева интерпретация. $\blacksquare$ е неизпълним, няма модел. Всеки дизюнкт, различен от $\blacksquare$, има поне 1 модел.

$\mathcal{D} \neq \blacksquare$

$L \in \mathcal{D}$

$L = \begin{cases} p & ; I(p) = И \\ \neg p & ; I(p) = Л \end{cases}$

$I \models^{\delta} L$ влече $I \models^{\delta} \mathcal{D}$.

Опр.
Нека казваме за един дизюнкт $\mathcal{D}$, че е тавтология, ако всеки път, когато I е δ.инт., $I \models^{\delta} \mathcal{D}$.

Кога един дизюнкт е тавтология? $\mathcal{D}$ е тавт iff има променлива p : $p \in \mathcal{D}$ и $\neg p \in \mathcal{D}$.

L - литерал. Дуален на L литерал ще наричаме

$L^{\partial} := \begin{cases} \neg p, & \text{ако } L = p \\ p, & \text{ако } L = \neg p. \end{cases}$

Тв.1
Тогава $\mathcal{D}$ е тавтология, ако има два дуални литерали $L, L^{\partial} \in \mathcal{D}$.

Тв.2
$\mathcal{D}$ е дизюнкт. $\mathcal{D}$ е изпълним iff $\mathcal{D} \neq \blacksquare$

$\varphi \models\!\dashv \psi_1 \& \dots \& \psi_n$

ψ_i - елементарни дизюнкции

За всяка δ. инт. I: $I \models^{\delta} \psi_i$ iff $I \models \mathcal{D}_{\psi_i}$

Нека I е булева интерпретация. $I \models^{\delta} \varphi$ iff $I \models \psi_1$ и $I \models \psi_2$ — и $I \models^{\delta} \psi_n$ iff I е модел за всяка елем. диз. ψ_i.

iff I е модел за всеки един от дизюнктите $\mathcal{D}_{\psi_1}, \dots, \mathcal{D}_{\psi_n}$.

$I \models^{\delta} \varphi$ iff $I \models^{\delta} \mathcal{D}_{\psi_1}, \dots, I \models^{\delta} \mathcal{D}_{\psi_n}$ iff $I \models^{\delta} S_{\varphi}$, където

$S_{\varphi} := \bigcup_i \{\mathcal{D}_{\psi_i}\} = \{\mathcal{D}_{\psi_1}, \dots, \mathcal{D}_{\psi_n}, \dots\}$

Опр. Казваме, че I е <u>модел за S</u>, където S е множество от дизюнкти, ако за всеки дизюнкт $D \in S$, $I \models^{\delta} D$. Така, $I \models^{\delta} \varphi$ iff $I \models^{\delta} S_{\varphi}$. За всяка булева интерпретация I, $I \models^{\delta} \emptyset$. S може и да е безкрайно.

Нека Δ е множество от съждителни формули, I е булева интерпретация, $I \models^{\delta} \Delta$ iff за всяко $\varphi \in \Delta$, $I \models^{\delta} \varphi$.

За всяка б. инт. I $\quad I \models^{\delta} \Delta$ iff $I \models^{\delta} \bigcup_{\varphi \in \Delta} S_{\varphi}$.

Пр. 1

$\Delta = \{p, p \vee p, p \vee p \vee p, p \vee - \vee p, -\}$

За всяко $\varphi \in \Delta$ $S_{\varphi} = \{\{p\}\}$. Тогава $S_{\Delta} = \{\{p\}\}$

Δ е изпълнимо iff S_{Δ} е изпълнимо.

Ако $\blacksquare \in S$, то S е неизпълнимо.

Правило на съждителната резолюция

Опр. Нека D_1 и D_2 са дизюнкти, а L е литерал. Казваме, че <u>правилото за съждителната резолюция е приложимо</u> към двойката D_1, D_2 относно L, ако $L \in D_1$ и $L^{\partial} \in D_2$. Бележим $!R_L(D_1, D_2)$.

Пр. 1

$!R_p(\{q_1, \neg p, r_1, -\}, \{-, \neg p, -\})$

$!R_{\neg p}(\{-, \neg p, -\}, \{-, p, -\})$

$!R_L(D_1, D_2)$ iff $!R_{L^{\partial}}(D_2, D_1)$

$L \in D_1, L^{\partial} \in D_2 \qquad L^{\partial} \in D_2, L^{\partial\partial} \in D_1$

Значи, ако D_1 и D_2 са диз. и L е литерал, то алгоритмично разпознаваемо е дали $!R_L(D_1, D_2)$.

Резултат от прилагането на правилото за резолюцията към D_1 и D_2 отн. L имаме само когато правилото е приложимо и този резултат е $\{D_1 \setminus \{L\}\} \cup \{D_2 \setminus \{L^\partial\}\}$.

$$R_L(D_1, D_2) := (D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\partial\})$$

<u>Лема 1</u> Нека I е булева интерпретация, D_1 и D_2 са дизюнкти, а L е литерал и $!R_L(D_1, D_2)$.

Ако $I \models^\delta \{D_1, D_2\}$, то $I \models^\delta \{D_1, D_2, R_L(D_1, D_2)\}$.

<u>Пр. 2</u>

$\{\underbrace{\{p, q\}}_{D_1}, \underbrace{\{\neg p, \neg q\}}_{D_2}\}$ - изпълнимо. Ако „махнем" едновременно два ~~[illegible]~~ литерала, получаваме!

Имаме

$\{q, \neg q\}$ $\{p, \neg p\}$

Следователно

$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

Получаваме $\{\blacksquare\}$, което не е изпълнимо. Но $\{D_1, D_2\}$ е изпълнимо.

10.01.2019

L - литерал $(P, \neg P)$

L^∂ - отрицание на L (дуален на L литерал)

$\mathcal{D}$ - дизюнкт - крайно множество от литерали

$I \models^\delta \mathcal{D} :=$ същ. лит. $L \in \mathcal{D} : I \models^\delta L$

$\mathcal{D} = \blacksquare$ $(\mathcal{D} = \{\})$

$\mathcal{D} \neq \blacksquare$ iff същ. δ. инт. I, $I \models \mathcal{D}$

$!R_L(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) : L \in \mathcal{D}_1$ и $L^\partial \in \mathcal{D}_2$

$R_L(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) := (\mathcal{D}_1 \setminus \{L\}) \cup (\mathcal{D}_2 \setminus \{L^\partial\})$

__Лема 1__ Ако дизюнктът $\mathcal{D} = R_L(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, $I \models^\delta \mathcal{D}_2$ и $I \models^\delta \mathcal{D}_1$, то $I \models^\delta \mathcal{D}$

__Опр.__ $\mathcal{D}$ е __резолвента__ на $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, ако има лит. L: $\mathcal{D} = R_L(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$

__Д-во__ L

__I сл.__ $I \models^\delta L$. Тогава $I \not\models^\delta L^\partial$, $I \models^\delta \mathcal{D}_2$. След. има лит. $M \in \mathcal{D}_2$, $I \models^\delta M$. След. $L^\partial \neq M$. $M \in \mathcal{D}_2 \setminus \{L^\partial\}$.

След. $M \in (\mathcal{D}_1 \setminus \{L\}) \cup (\mathcal{D}_2 \setminus \{L^\partial\}) = R_L(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \subseteq \mathcal{D}$

$M \in \mathcal{D}$. След. $I \models^\delta \mathcal{D}$.

__II сл.__ $I \not\models^\delta L$. $I \models^\delta \mathcal{D}_1$; има лит. $K \in \mathcal{D}_1$, $I \models^\delta K$.

$L \neq K$, $K \in \mathcal{D}_1 \setminus \{L\} \subseteq \mathcal{D}$, След. $I \models^\delta \mathcal{D}$. Така, $I \models^\delta \mathcal{D}$.

__Опр.__ Нека S е множество от дизюнкти. __Резолютивен извод от S__ наричаме крайна редица от дизюнкти $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$: всеки ~~нн~~ неин член е или от S, или е резолвента на два предходни члена.

Свойства:

* Ако $D_1, \dots, D_n$ е резолютивен извод (р.и.) от S и $k \leq n$, то $D_1, \dots, D_k$ е също р.и.
* Ако α и β са резолютивни изводи от S, то α, β е също резолютивен извод от S

Пр.1 $\{\{P, Q\}, \{\neg P, R\}, \{Q, R\}\} = S$

$$\{P,Q\}, \{\neg P, R\} \searrow \swarrow \{Q, R\}$$

$\{P,Q\}, \{\neg P, R\}, \{Q,R\}$ е резолютивен извод от S

* Ако S е разпознаваемо (рекурсивно) множество и $D_1, \dots, D_k$ е крайна редица от дизюнкти, то можем алгоритмично да разпознаем дали $D_1, \dots, D_k$ е р.и. от S.
* Нека I е булева инт., S е мн. от дизюнкти и $D_1, \dots, D_n$ е р.и. от S. Ако $I \models^{s} S$, то за всяко $k \leq n$, $I \models^{s} D_k$.

Д-во инд. отн. k, $1 \leq k \leq n$

* $k=1$. Тогава $D_1 \in S$ и $I \models D_1$
* Нека $1 \leq k \leq n$. Всеки път, когато $1 \leq m \leq k$, $I \models^{s} D_m$.

Ако $k+1 \leq n$, то D_{k+1} — $\in S$, след. $I \models^{s} D_{k+1}$

— $D_{k+1} = R_L(D_i, D_j)$, $i, j < k+1$

$i, j \leq k$, след. $I \models^{s} D_i$, $I \models^{s} D_j$.

От лемата следва $I \models^{s} D_{k+1}$ □

Опр. Нека S е множество от дизюнкти и D е дизюнкт. Казваме, че D е <u>резолютивно изводим от S</u>, ако има резолютивен извод от S, чийто последен член е D.

т.е. има крайна редица $D_1, \dots, D_n$: | р.и. от S
| $D = D_n$.

Пишем $S \vdash_r D$

* Нека S е мн. от дизюнкти, I е б. инт. и $S \vdash_r D$. Тогава, ако $I \models S$, то $I \models D$.

<u>Т-ма 1</u> (Коректност на резолютивната изводимост)
Нека S е множество от дизюнкти. Ако $S \vdash_r \blacksquare$, то S е неизпълнимо.

<u>Д-во</u> Нека $S \vdash_r \blacksquare$. Тогава има резолютивен извод на $\blacksquare$ от S. Нека $D_1, \dots, D_n$ е такъв извод, и $D_n = \blacksquare$.

Да допуснем, че S е изпълнимо и нека $I \models S$. Тогава от предното твърдение $I \models \blacksquare$. Абсурд.

Значи S е неизпълнимо.

* Ако $S \vdash_r D$, то има крайно подмножество $S_0 \subseteq S$, такова че $S_0 \vdash_r D$.

<u>Д-во</u> Нека $S \vdash_r D$. Да разгледаме един резолютивен извод на D от S,

$D_1, \dots, D_n$.

* $D_1, \dots, D_n$ е р.и. от S
* $D_n = D$

$S_0 = \{D_i \mid 1 \le i \le n, D_i \in S\}$

S_0 е крайно и $S_0 \subseteq S$.

Но $D_1, \dots, D_n$ е р.и. от S_0.

Значи $S_0 \vdash_r D$ □

Трансверзали за фамилии от множества

Опр. Нека A е множество, чиито елементи са множества. A е фамилия от множества. Казваме, че едно множество Y е <u>трансверзала за A</u>, ако за всеки елемент $x \in A$, $Y \cap x \neq \emptyset$.

Пр. 1 $\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{c\}\} = A$

$Y := \{a,b\}$ не е трансверзала

$Y := \{b,c\}$ е транверзала

$Y := \bigcup A$ е трансверзала

$\quad \bigcup A = \{a,b,c\}$

Свойства:

* A има трансверзала iff за всяко мн. $x \in A$, $x \neq \emptyset$.

Д-во

(Достатъчност) Нека Y е трансверзала на A. Нека $x \in A$. Тогава $Y \cap x \neq \emptyset$. В частност, $x \neq \emptyset$, т.е. за всяко $x \in A$, $x \neq \emptyset$

(Необходимост) Нека $Y := \bigcup A$. Тогава нека $x \in A$, $x \subseteq Y$, $x \cap Y = x \neq \emptyset$.

Значи $Y \cap x \neq \emptyset$, т.е. Y е трансверзала на A. □

Опр. Нека A е фамилия от множества. За едно множество Y казваме, че е <u>минимална трансверзала</u> за A, ако:

* Y е трансверзала за A
* Ако $Y' \subseteq Y$ и Y' е трансверзала, то $Y' = Y$.

Тв. 1 Нека A е фамилия от множества и Y е трансверзала за A. Тогава следните са еквивалентни:

(а) Y е минимална трансверзала

(б) Всеки път, когато $Y_0 \subsetneq Y$, то е в сила, че Y_0 не е трансверзала.

(в) За всяко $a \in Y$, $Y \setminus \{a\}$ не е трансверзала за A.

(г) За всеки елемент $a \in Y$ съществува $x \in A$, такова че $Y \cap x = \{a\}$.

<u>Д-во</u> Ще докажем само два случая

(в) $\Rightarrow$ (г) Нека (в) и $a \in Y$.

Има $x \in A : (Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset$. Y е трансверзала за A, значи $Y \cap x \neq \emptyset$

Значи $Y \cap x = \{a\}$.

(г) $\Rightarrow$ (в) Нека (г). Нека $a \in Y$.

Съгласно (г) избираме $x \in A$, така че $Y \cap x = \{a\}$, $(Y \setminus \{a\}) \cap x = \emptyset$.

следователно $Y \setminus \{a\}$ не е трансверзала за A. Така (в) е доказано. ◻

<u>Пр. 2</u> $\{\{a,b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\} = A$

$\{b,c\}$ е минимална трансверзала

$\{a,c\}$ е минимална трансверзала

<u>Пр. 3</u> $A = \{\{a,b,d\}, \{b,d,c\}, \{a,d,c,e\}\}$

$\{a,b,e\}$ е трансверзала (не минимална)

$\{d\}$ е минимална трансверзала

$\{a,b\}$ е минимална трансверзала

<u>Тв. 2</u> Ако A е фамилия от непразни множества, то не винаги A има минимална трансверзала.

<u>Пр. 4</u> $X_n := \{[n,\infty) \mid 0 \leq n\}$

$A = \{X_n \mid n \geq 0\}$

A има трансверзала (напр. $\mathbb{N}$)

A няма минимална трансверзала. Да допуснем, че Y е минимална трансверзала за A. Нека $k = \min Y$. $Y \setminus \{k\}$ също е трансверзала за A. Противоречие.

Т-ма (за минималната трансверзала) Нека A е фамилия от непразни крайни множества. Тогава A има минимална трансверзала.

Лема 2 Нека S е множество от дизюнкти, което е затворено относно правилото за резолюцията, т.е. $D_1, D_2 \in S$ и D е резолвента на D_1 и D_2 влече, че $D \in S$.

Ако $\blacksquare \notin S$, то S е изпълнимо

Д-во Нека S е произволно непразно множество от дизюнкти, което е затв. отн. $\mathcal{R}$ и $\blacksquare \notin S$.

Така, S е множество от непразни крайни множества.

След. от т-мата за мин. трансв. S има минимална трансверзала. Нека Y е мин. трансв. за S.

Значи за всяко $D \in S$, имаме $D \cap Y \neq \emptyset$ и за всеки литерал $L \in Y$ същ. $D \in S$: $Y \cap D = \{L\}$.

Не е възм. $P \in Y$ и $\neg P \in Y$. Наистина, да допуснем, че има пр. от P, ~~такава~~ такова че $P \in Y$ и $\neg P \in Y$.

Същ. $D \in S$: $Y \cap D = \{P\}$.

Същ. $D \in S$: $Y \cap D = \{\neg P\}$.

Нека $D_1 \in S$ и $Y \cap D_1 = \{P\}$ и $D_2 \in S$ и $Y \cap D_2 = \{\neg P\}$.

$D_1, D_2 \in S$; $P \in D_1$, $\neg P \in D_2$. Значи $! \mathcal{R}_p(D_1, D_2)$

След. $\mathcal{R}_p(D_1, D_2) \in S$, защото S е затв. отн. $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}_p(D_1, D_2) = (D_1 \setminus \{P\}) \cup (D_2 \setminus \{\neg P\}) \in S$.

След. $Y \cap ((D_1 \setminus \{P\}) \cup (D_2 \setminus \{\neg P\})) \neq \emptyset$ за Y - трансверзала на S.

$\mathcal{R}_p(D_1, D_2) \cap Y = (Y \cap (D_1 \setminus \{P\})) \cup (Y \cap (D_2 \setminus \{\neg P\})) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ - отбсурд.

Следователно няма променлива P: $\{P, \neg P\} \subseteq Y$.

$I_y[Q] := \begin{cases} И, & Q \in y \\ Л, & Q \notin y \end{cases}$

I_y е модел за S и значи S е изпълнимо. Наистина, нека $D \in S$. Тогава $D \cap y \neq \emptyset$. Нека $L \in D \cap L$

<u>I сл.</u> $L = Q$. Тогава $I_y(L) = И$. Значи $I_y \models D$.
променлива

<u>II сл.</u> $L = \neg Q$. Тогава $Q \notin y$. Значи $I_y(Q) = Л$. Значи $I_y(L) = И$, $I_y \models L$, т.е. $I_y \models D$.

За $I_y \models^S D$, но D е произв. елемент на S. Значи I_y е модел на S.

□

<u>Т-ма 3</u> (Пълнота на резолютивната изпълнимост).

Нека S е <u>множество от дизюнкти</u>. Ако S е неизпълнимо, то $S \vdash^r \blacksquare$

Д-во: Да озн. $S^* = \{D \mid S \vdash^r D\}$

Тогава:

* $S \subseteq S^*$, $D \in S$. Тогава D е р.и. от S на D. $D \in S^*$
* D_1 и $D_2 \in S^*$ и $!R_L(D_1, D_2)$, след. $R_L(D_1, D_2) \in S^*$.

Наистина, нека $D_1, D_2 \in S^*$ и $!R_L(D_1, D_2)$.

$S \vdash^r D_1$ и $S \vdash^r D_2$.

Нека $D_1', \dots, D_m'$ е р.изв. на D_1 от S, а $D_1'', \dots, D_k''$ е р.и. на D_2 от S.

Да разгл. следната крайна редица $D_1', \dots, D_m', D_1'', \dots, D_k'', R_L(D_1, D_2)$ за някой литерал L. Тя е резолютивно изводима $R_L(D_1, D_2)$ от S. Значи $R_L(D_1, D_2) \in S^*$

Така $S \subseteq S^*$ и S^* е затворено отн. R. За $S \nvdash^r \blacksquare$, т.е. $\blacksquare \notin S^*$.

Нека S е неизпълнимо. Тогава не е вярно, че $\blacksquare \notin S^*$ съгласно лема 2. Значи $\blacksquare \in S^*$, т.е. $S \vdash^r \blacksquare$.

□

$S, S^* = \{ D \mid S \vdash^r D \}$

* $S \subseteq S^*$
* S^* е затв. отн. R $\Big\}$ (1)
* $S^{**} = S^*$
* S^* е най-малкото отн. $\subseteq$ множество, което има (1)

Сл. 1 (Теорема за компактност за множества от дизюнкти)

Нека S е ~~[illegible]~~ множество от дизюнкти. Тогава S е неизпълнимо iff има крайно $S_0 \subseteq S$, S_0 е ~~[illegible]~~ неизпълнимо.

Д-во S е неизп.

$S \vdash^r \blacksquare$. Съгласно ~~[illegible]~~ Т-мата за комп. има крайно S_0, $S_0 \subseteq S$, $S_0 \vdash^r \blacksquare$;

Обратното е тривиално

$\square$

17.01.2019

S - множество от дизюнкти

S е неизпълнимо iff същ. крайно $S_0 \subseteq S$: S_0 е неизпълнимо

Нека Γ е множество от съждителни ф-ли. Тогава на Γ можем да съпоставим множество от дизюнкти S_Γ: за всяка δ. инт. I, $I \models^{\delta} \Gamma$ iff $I \models^{\delta} S_\Gamma$

<u>Т-ма</u> (Компактност на съждителната изпълнимост)

Нека Γ е множество от съжд. ф-ли. Тогава Γ е неизпълнимо iff същ. крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, Γ_0 е неизпълнимо

<u>Д-во</u> (Необходимост) Нека $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ (Γ_0 - крайно). Ако Γ_0 е неизп., то и Γ е неизпълнимо.

(Достатъчност) Нека Γ е неизпълнимо. Тогава S_Γ е неизпълнимо. Същ. S_0, $S_0 \subseteq S_\Gamma$, S_0 е крайно и S_0 е неизпълнимо

Нека $S_0 = \{D_1, \dots D_n\}$, $D_i \in S_\Gamma$. Следователно същ. ф-ла $\varphi_i \in \Gamma$, $D_i \in S_{\varphi_i}$ ($S_\Gamma = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} S_\varphi$). Избираме за всяко $D_i \in S_0$ ф-ла $\varphi_i \in \Gamma$, такава че $D_i \in S_{\varphi_i}$. $S_0 = \{D_1, \dots D_n\} \subseteq S_{\{\varphi_1, \dots \varphi_n\}}$.

Следователно $S_{\{\varphi_1, \dots \varphi_n\}}$ е неизпълнимо. Значи $\{\varphi_1, \dots \varphi_n\} =: \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ е неизпълнимо $\square$

<u>Т-ма</u> (Жак Ербран) Нека Γ е множество от затв. унив. ф-ли от език с поне една инд. константа и без форм. равенство. Тогава следните са еквивалентни:

(а) Γ е неизпълнимо

(б) Същ. крайно подмножество на $CSI(\Gamma)$, което е булево неизпълнимо

(в) Същ. краен брой затв. частни случаи $\theta_1, \dots \theta_n$ на ф-ли от Γ, такива че $\models \neg\theta_1 \vee \dots \vee \neg\theta_n$

Лема 1 Γ е изпълнимо iff $CSI(\Gamma)$ е булево изпълнимо (вече е доказана)

Д-во (на т-мата на Ербран)

((а) iff (б)) Γ е неизп. iff $CSI(\Gamma)$ е бул. неизп. iff същ. крайно $\Delta \subseteq CSI(\Gamma)$, Δ е б. неизп.

$\Delta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$

Тогава Δ е б. неизп. iff $\neg\theta_1 \vee \dots \vee \neg\theta_n$ е булева тавтология.

((б) влече (в)) Δ е б. неизп. за всяка б. инт. I: $I \not\models \Delta$.

След. същ. $\theta_i \in \Delta$, $I \not\models^{б} \theta_i$. След. $I \models^{б} \neg\theta_i$.

След. щом Δ е неизп. при всяка б. инт. I, $I \models^{б} \neg\theta_1 \vee \dots \vee \neg\theta_n$

((в) влече (б)) Нека $\models^{б} \neg\theta_1 \vee \dots \vee \neg\theta_n$. След. за всяка булева интерпретация има ф-ла $\neg\theta_i$, $I \models^{б} \neg\theta_i$. Значи $I \not\models \theta_i$. Така няма б. инт., за която $I \models^{б} \Delta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$.

$\square$

Алгоритъм, който по дадено множество от затворени унив. ф-ли Γ в подходящ език (т.е. $Const_{\mathcal{L}} \neq \emptyset$) прекратява точно тогава, когато Γ е неизпълнимо.

Нека разгл. всевъзможните крайни редици $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ от ф-ли от Γ. Нека на всяка редица $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ заместим $x_1, \dots, x_k$ със съответно $\tau_1, \dots, \tau_k$ - затв. термове.

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$

$\tau_1, \dots, \tau_k$.

Разгл. частни случаи. Ако получим множество от затв. ф-ли, което е неизпълнимо, то и Γ е неизпълнимо. Ако е изпълнимо, разгл. следващата редица от затв. частни случаи, получени чрез $\{x_1/\tau_1', \dots, x_n/\tau_n'\}$. Тогава отново имаме крайно множество от затв. ф-ли.

Така ще получим редица $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ от крайни мн., $\Delta_i \subseteq CSI(\Gamma)$ и тя има следното свойство:
Всеки път, когато $\Delta \subseteq CSI(\Gamma)$ и Δ е крайно, съществува m: $\Delta \subseteq \Delta_m$.

Нека разгледаме $CSI(\Gamma)$. Интересува ни дали $S_{CSI(\Gamma)} \vdash \blacksquare$

$\sigma := \{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\}$

$\varphi \in \Gamma$

$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \theta$, θ - безкванторна

$\theta\sigma$ е едновременна замяна на $x_1, \dots, x_n$ с $\tau_1, \dots, \tau_n$ в θ).

Съпоставяме на $\theta\sigma$ КНФ ѝ. Оказва се, че $\theta \vDash\!\dashv E_1 \& \dots \& E_n$ (привеждане в КНФ) може да се извърши преди субституцията, тъй като

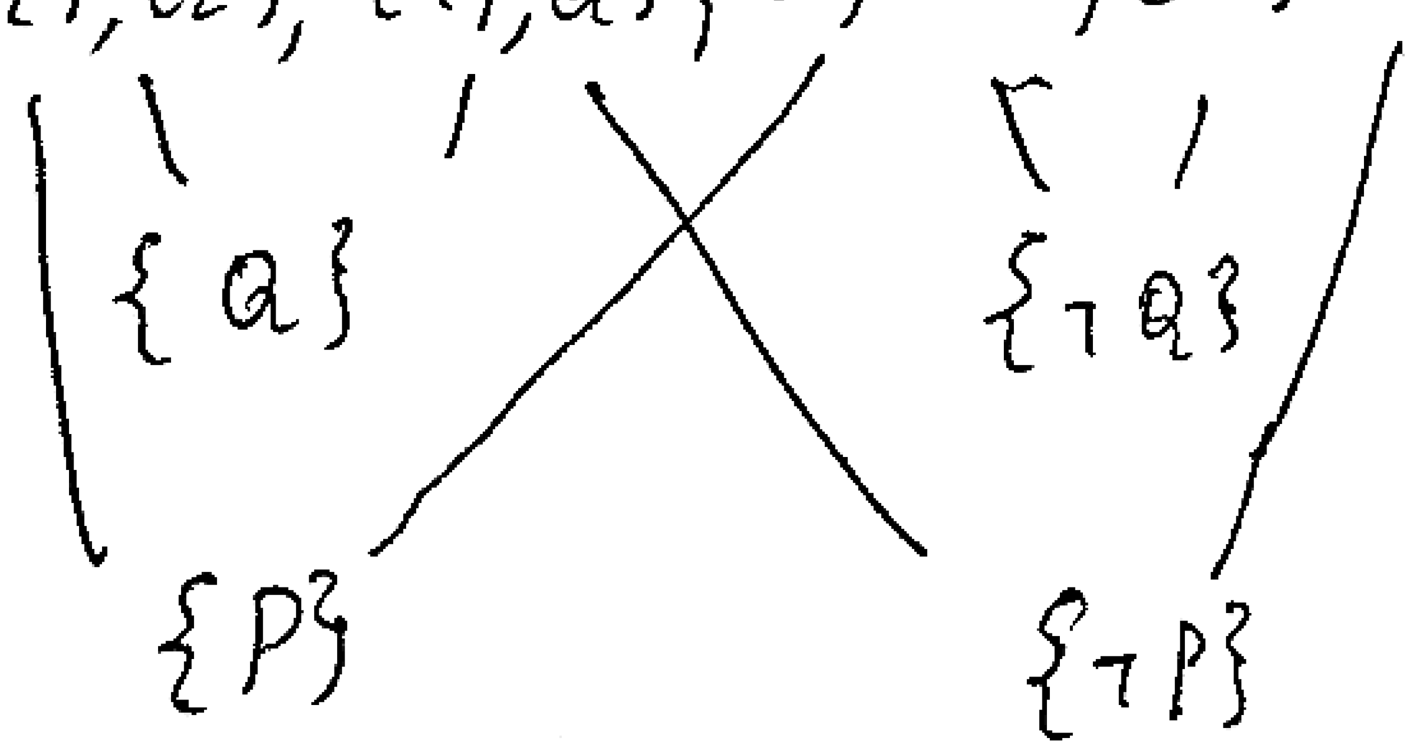
елем. дизюнкция на атомарни ф.

$\theta\sigma \vDash\!\dashv E_1\sigma \& \dots \& E_n\sigma$.

$E_i\sigma$ поражда $D_{E_i\sigma}$, които ще наричаме <u>предикатни дизюнкти</u>.

<u>Пр.1</u> (input резолюцията не е пълна)

$\{\{P, Q\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\} = A$



Ако взимаме резолвенти само на резолвента или на дизюнкти от A и дизюнкт от A, няма да стигнем до $\blacksquare$. (т.е. ако поне един от дизюнктите е от A на всяка стъпка)

Нека $\mathcal{L}$ е език на пред. смятане без форм. равенство.
Γ е мн. от затв. ф-ли, φ е затв. ф-ла.
Интересува ни дали $\Gamma \vDash \varphi$.

$\Gamma \vDash \varphi$ iff $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизп. в $\mathcal{L}$ iff $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизп. в д-с.
iff $\{\Pi\mathrm{НФ}(\psi) \mid \psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}\}$ е неизп. iff
iff $\{(\Pi\mathrm{НФ}(\psi))^S \mid \psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}\}$ е неизп. iff
iff с метода на резолюцията от затв. ч. случаи е рез. изводим $\blacksquare$.

Хорнови дизюнкти

<u>Опр.</u> Един съждителен дизюнкт D се нарича <u>хорнов</u>, ако съдържа най-много един позитивен литерал.

<u>Пр. 1</u> Хорнови дизюнкти са:

* $\blacksquare$ (не навсякъде се смята за хорнов)
* $\{P\}$, където P е позитивен литерал, т.е. съжд. променлива или атомарна формула. Дизюнкти от този вид се наричат <u>факти</u>.
* $\{P, \neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}$, $n \geq 1$ - <u>правила</u>

$P :- Q_1, \dots, Q_n.$

$P \vee \neg Q_1 \vee \dots \vee \neg Q_n \models\!\!\!\dashv \neg(Q_1 \& \dots \& Q_n) \vee P \models\!\!\!\dashv Q_1 \& \dots \& Q_n \Rightarrow P$

* $\{\neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}$, $n \geq 1$ - <u>цели</u>

<u>Опр.</u> <u>Хорнова програма</u> е крайно множество от правила и факти

<u>Свойства</u>:

* Ако D_1 и D_2 са хорнови дизюнкти и $!R_L(D_1, D_2)$, то $R_L(D_1, D_2)$ е също хорнов дизюнкт
* Нека S е множество от хорнови дизюнкти ~~[illegible]~~ и $\blacksquare \notin S$.
Ако S е неизпълнимо, то S съдържа поне един факт и поне

една цел.

Д-во Нека S е множество от хорнови дизюнкти, $\blacksquare \notin S$. Нека S е неизпълнимо.

Да допуснем, че S не съдържа факти. Нека $\mathcal{D} \in S$.

Тъй като $\mathcal{D} \in S$, то $\mathcal{D} \neq \blacksquare$ и $\mathcal{D}$ не е факт.

Значи $\mathcal{D}$ е правило или цел. Тогава $\mathcal{D}$ съдържа поне един негативен литерал.

$I_\Lambda[P] = \Lambda$ за всеки ~~[illegible]~~ позитивен литерал. Тогава $I_\Lambda \models S$ - абсурд.

Да допуснем, че S не съдържа цели.

Тогава $\mathcal{D} \in S$, след. $\mathcal{D} \neq \blacksquare$ и $\mathcal{D}$ не е цел.

Значи $\mathcal{D}$ е факт или правило. Тогава $\mathcal{D}$ съдържа поне един позитивен литерал. $I_И[P] = И$ на всеки позитивен лит. Тогава $I_И \models S$ - абсурд. $\square$

Ако S е хорнова програма, то S има модел.

$I : Prop \to \{И, \Lambda\}$

Нека на I съпоставим $A_I = \{P \mid I(P) = И\} \subseteq Prop$

Обратно, ако A е мн. от съжд. променливи, то на A съпоставяме характеристичната ѝ функция $I(P) = \begin{cases} И, & P \in A \\ \Lambda, & P \notin A \end{cases}$

Ако на A съпоставим I_A и на I_A съпоставим A_{I_A}, ще получим $A = A_{I_A}$. Аналогично, $I = I_{A_I}$.

В множеството на всички б. интерпретации деф. частична наредба;

~~[illegible]~~ $I \preceq J :\Leftrightarrow A_I \subseteq A_J$

Тв.1 Нека S е множество от хорнови дизюнкти. Нека $\mathcal{M}$ е непразно множество от модели на S. Тогава има ~~~~ модел $I_\mu \models S$, такъв че за всеки $I \in \mathcal{M}$, $I_\mu \preceq I$.

Сл.1 Нека S е множество от правила и факти. Тогава S има най-малък модел I_m, т.е.

$I_m \models S$ и за всеки модел I на S, $I_m \preceq I$

Д-во (на сл.1) Нека S е множество от правила и факти. Тогава S е изпълнимо. (защото няма цел в S). Нека $\mathcal{M}$ е множеството от всички модели за S. Тогава $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

Съгласно тв. I_μ е модел за S и за всяко $I \in \mathcal{M}$, $I_\mu \preceq I$. Но в $\mathcal{M}$ са всички модели на S. следователно в качеството на I_m можем да вземем I_μ. □

Д-во (на тв.1) Нека $\mathcal{M} \neq \emptyset$. След. S е изп. мн., ~~~~

Дефинираме $A_\mu = \bigcap_{I \in \mathcal{M}} A_I$; т.е. $I_\mu(P) = И$ iff за всяко $I \in \mathcal{M}$, $I[P] = И$.

Твърдим, че I_μ е модел за S. Нека $D \in S$. Ще докажем, че D е верен при I_μ.

1сл. $D = \{P\}$ е факт. Тогава за всяко $I \in \mathcal{M}$, $I \models D$, т.е. $I[P] = И$. Значи $I_\mu(P) = И$, поради което $I_\mu \models D$.

2сл. $D = \{\neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}$ е цел. Да допуснем, че $I_\mu \not\models D$. Тогава $I_\mu \not\models \neg Q_1$, $I_\mu \not\models \neg Q_2, \dots, I_\mu \not\models \neg Q_n$. Следователно

$I_\mu[Q_1] = I_\mu[Q_2] = \dots = I_\mu[Q_n] = И$.

Нека $I_0 \in \mathcal{M}$. Тогава $I_0[Q_1] = \dots = I_0[Q_n] = И$.

Значи $I_0 \not\models \neg Q_1, \dots, I_0 \not\models \neg Q_n$ и $I_0 \not\models \{\neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}$, т.е.

$I_0 \not\models D$, но $D \in S$. $I_0 \in \mathcal{M}$ и $I_0 \models D$ — абсурд. След. $I_\mu \models D$.

3 сл. $D = \{P, \neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}, n \geq 1$ е правило

Да допуснем, че $I_M \not\models D$, $I_M \not\models P$, $I_M \not\models \neg Q_1, \dots, I_M \not\models \neg Q_n$.

$I_M[P] = Л$

$I_M[Q_1] = \dots = I_M[Q_n] = И$

Щом $I_M[P] = Л$, в M има б. инт. J, такава че $J[P] = Л$.

$J \in M$ и след. $J[Q_1] = \dots = J[Q_n] = И$.

Тогава $J \not\models P, J \not\models \neg Q_1, \dots, J \not\models \neg Q_n$.

Значи $J \not\models \{P, \neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}$. Но $D \in S$ и $J \in M$, след. $J \models D$.

Абсурд. Следователно $I_M \models D$. □

Тв. 2

S - правила и факти } непразни

C - множество от цели

$S \cup C$ е неизпълнимо

Тогава съществуват крайно $S_0 \subseteq S$ и цел $G \in C$, такива че $S_0 \cup \{G\}$ е неизпълнимо

Д-во Твърдим, че същ. $G \in C : S \cup \{G\}$ е неизпълнимо. За целта да допуснем противното, т.е. за всяко $G \in C$, $S \cup \{G\}$ е изпълнимо. Значи за всяка цел $G \in C$ избираме $I_G : I_G \models S \cup \{G\}$. Озн. $M = \{I_G \mid G \in C\}$. $M \neq \emptyset$, защото C е непразно.

Да разгл. I_M, т.е. $I_M[P] = И$ iff за всяко $J \in M$, $J[P] = И$.

M е непразно множество от модели на S. Съгласно тв. 1, $I_M \models S$.

Нека $G \in C$. Тогава $I_G \models G$. Да допуснем, че $I_M \not\models C$. избираме $G_0 \in C : I_M \not\models G_0$.

$G_0 = \{\neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}, n \geq 1$.

$I_M \not\models \neg Q_1, \dots, I_M \not\models \neg Q_n$. След. $I_M[Q_1] = \dots = I_M[Q_n] = И$.

След. за всяко $G \in C$

$I_G[a_1] = \dots = I_G[a_n] = И$.

В частност, $G = G_0$, $I_{G_0}[a_1] = \dots = I_{G_0}[a_n] = И$, т.е.

$I_{G_0} \not\models \neg a_1, \dots, I_{G_0} \not\models \neg a_n$.

За $I_{G_0} \models \{\neg a_1, \dots, \neg a_n\}$, т.е. $I_{G_0} \not\models G_0$ – абсурд. След. $I_\mu \models C$.

Така получихме $I_\mu \models S \cup C$. – абсурд.

След. същ. $G \in C$: $S \cup \{G\}$ е неизпълнимо. Нека изберем така $G \in C$.

От т-мата за компактност същ. крайно Δ, $\Delta \subseteq S \cup \{G\}$, Δ е неизп.;

$S_0 = \Delta \cap S$. Тогава $\Delta = S_0 \cup \{G\}$ е неизпълнимо. □

S, C : $S \cup C$ е неизпълнимо

правила и факти (за S); цел (за C)

$G \in C$ $\quad \mathcal{D}_1 \in S$

$R(G, \mathcal{D}_1)$

~~...~~ отново е цел

$\mathcal{D}_2 \in S$

$R(G, \mathcal{D}_2)$

~~...~~ отново е цел

...

□

Това е специална форма на input изводимост.

Тв.3
Ако $\mathcal{L}$ е език без формално равенство, Γ е множество от затворени формули. Γ е неизпълнимо iff същ. крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ - неизпълнимо.

Тв.4 Γ е изпълнимо iff всяко крайно $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ е изпълнимо

аксиоми за форм. равенство:

$\forall x\ Eq(x,x)$

$\forall x \forall y (Eq(x,y) \Leftrightarrow Eq(y,x))$

$\forall x \forall y \forall z (Eq(x,y) \,\&\, Eq(y,z)) \Rightarrow Eq(x,z))$

$\forall x_1, \dots, \forall x_n \forall x_1' \dots \forall x_n' (Eq(x_1,x_1') \,\&\, \dots \,\&\, Eq(x_n,x_n') \Rightarrow (f(x_1,\dots,x_n) \doteq f(x_1',\dots,x_n'))$

—————— || —————— $(p(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow p(x_1',\dots,x_n'))$